Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

СРАВНЕНИЕ ПРОГНОЗНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, НАБЛЮДАЕМЫХ НА ВАЛЮТНЫХ РЫНКАХ

Выполнил: студент гр. 23641/3 Гаврилов А.О.

Руководитель: к.ф.-м.н. доц. Иванков А.А.

Санкт-Петербург
2018

Случайный процесс как динамическая система

(1) $G(t) = X_t, \quad где\, X_t \; - сечение\, процесса$

$G_{t_{0,}t}$ - набор отображений, описывающих движение в фазовом пространстве

(2) $X_t = G_{t_{0,}t}(X_0),\; G_{t_{0,}t}(X_0) = G(t)$

Поиск инвариантов - основная задача моделирования ДС

Стандартный подход - рассмотрение фазовой плотности системы в её фазовом пространстве

Кинетическая модель прогнозирования

Уравнение Лиувилля:

(3) $$\frac{\partial f_T(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u_T(x,t) f_T(x,t)}{\partial x}=0$$

(4) $$\widehat{f_H}(x)=\frac{1}{TH}\sum_{i=1}^{T} K\left(\frac{x-x_i}{H}\right)$$

(5) $$K(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

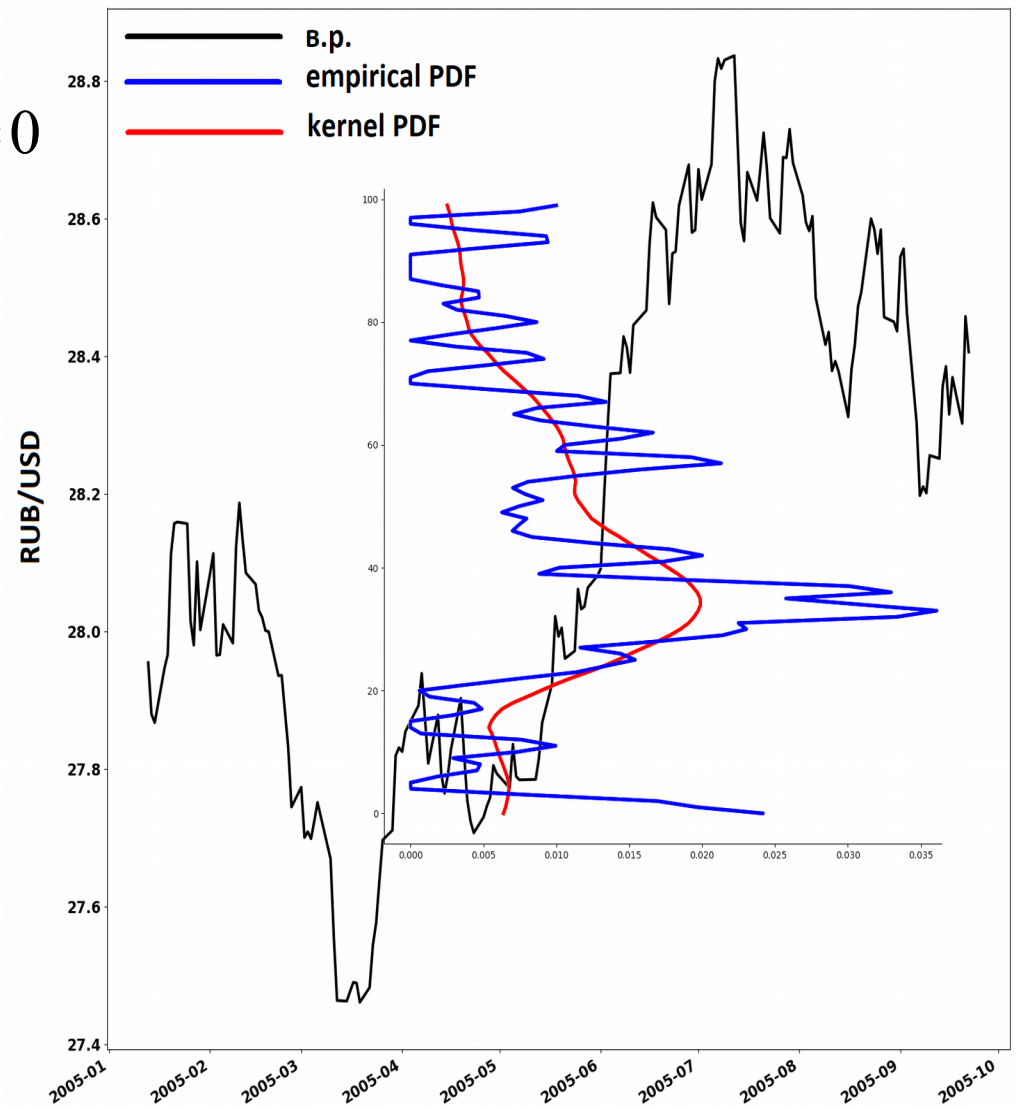
$u_T(x,t)$ — *эмпирическая лиувиллева скорость*

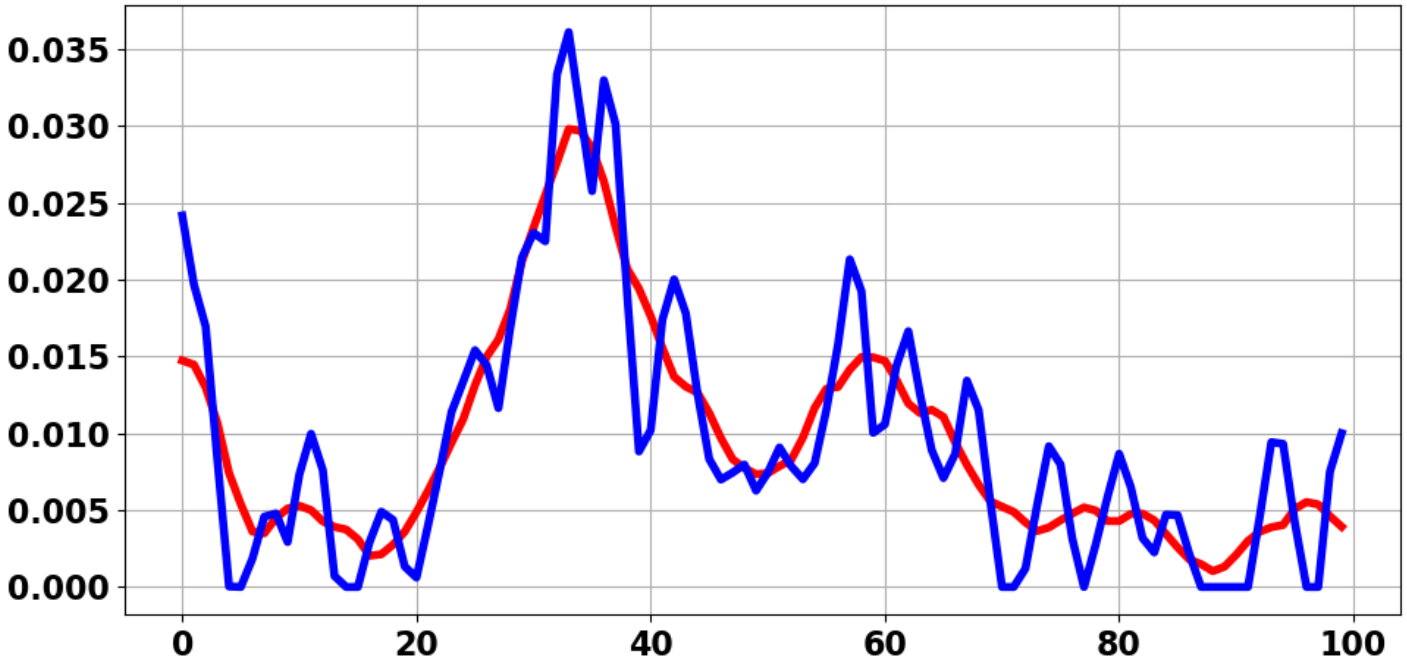
$f_T(x,t)$ — *плотность вероятности процесса*

$K(u)$ — *функциональное ядро*

H — *параметр сглаживания*

Иллюстрация кинетического подхода

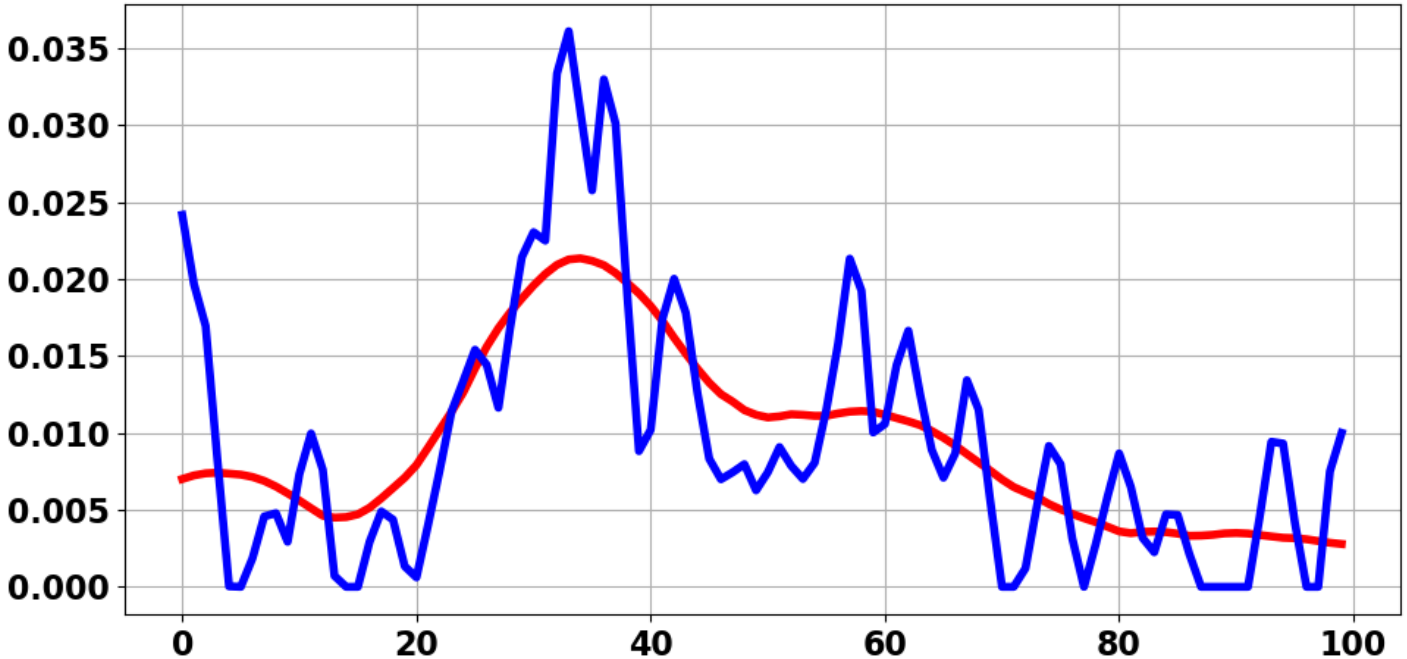




Эмпирическая оценка плотности

Ядерная оценка плотности

H=0.05



H=0.13

Традиционный регрессионный анализ

Линейная регрессия

(6) $$y_t = \grave{x}_t \beta_t + \epsilon_t,\ t = 1 \ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)^2 \to min,$$

Авторегрессия

(7) $$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \varepsilon_t,$$ $p -$ *порядок модели*

$a_i -$ *коэффициенты авторегрессии*

Тесты единичного структурного изменения

(8) $$H_0 : \beta_t = \beta$$

$$H_1 : \begin{cases} \beta_t = \beta, & t \leqslant m = \text{точка разладки} \\ \beta_t = \beta + \gamma, & t > m;\ \gamma \neq 0 \end{cases}$$ $k < m < n - k;$ $\lambda = \frac{m}{n}$

Тест Чоу

(9) $$F_n\left(\frac{m}{n}\right) = F_n(\lambda) = \frac{\left(SSR_{1,n} - \left(SSR_{1,m} + SSR_{m+1,n}\right)\right)/k}{\left(SSR_{1,m} + SSR_{m+1,n}\right)/(n - 2k)}$$

$\hat{\beta}_{r,s} -$ *МНК оценка* β

$\hat{\epsilon}_{r,s} -$ *МНК остатки* ϵ

$SSR_{r,s} = \hat{\epsilon}'_{r,s} \hat{\epsilon}_{r,s} -$ *сумма квадратов остатков*

$$F_n(\lambda) \sim F(k, n - 2k)$$

$$kF_n(\lambda) \to \chi^2(k)$$

Тест Quandt LR с неизвестной точкой структурного изменения

(10) $$QLR = \max_{m \in [m_0, m_1]} F_n\left(\frac{m}{n}\right)$$

Определение интервалов квазистационарности

(11) $$H_0: f_1(x) = f_2(x), \text{ против}$$
$$H_1: f_1(x) = f_2(x - \Delta)$$

$f_1(x), \quad f_2(x)$ неизвестные плотности вероятностей

(12) $$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij}, \quad \text{где } h_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i < y_j \\ 0, & x_i > y_j \end{cases}$$

$x_{1,} \dots x_n \qquad y_{1,} \dots y_m$
вариационный ряд для каждой выборки

$U_1(\alpha), U_2(\alpha)$
критические значения критерия Манна – Уитни

(13) $$U_1(\alpha) \le U \le U_2(\alpha) \;\Rightarrow\; H_0 \text{ отклоняется}$$

```
sample = 10 ******************** p-value = 0.05 ********************
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
  0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1  ...    1 1 1 1 0 1
    1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1  ...    1 1 1 1 1 1
      0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1  ...    1 1 1 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0  ...    0 1 1 0 0 1
          1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 0 0 1
            1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 0 1
                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1  ...    1 1 1 0 0 1
                  1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0  ...    0 1 0 0 0 1
                    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 0 1
                      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0  ...    1 1 1 0 0 1
                                  ...                  ...    ...
                        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                          1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 0 1
                                1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 0 1
                                    1 1 1 1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                      1 1 1 1 1 1 0 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                        1 1 1 1 0 1 1  ...    1 1 1 0 0 1
                                          1 1 1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                            1 0 0 1 0  ...    0 1 1 0 0 1
                                              1 1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                                1 1 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                                  0 1  ...    1 1 1 1 1 1
                                                    1  ...    1 1 1 0 0 1
                                                       ...    1 1 1 1 1 1
                                                              1 1 1 1 1 1
                                                              1 1 1 1 1 1
                                                              1 1 1 1 1 1
                                                              1 1 1 1 0 1
                                                              1 1 0 1 1 1
                                                                1 1 1 1 1
                                                                  1 1 1 1
                                                                    1 1 1
                                                                      1 1
                                                                        1
```

Проблемы анализа нестационарного временного ряда

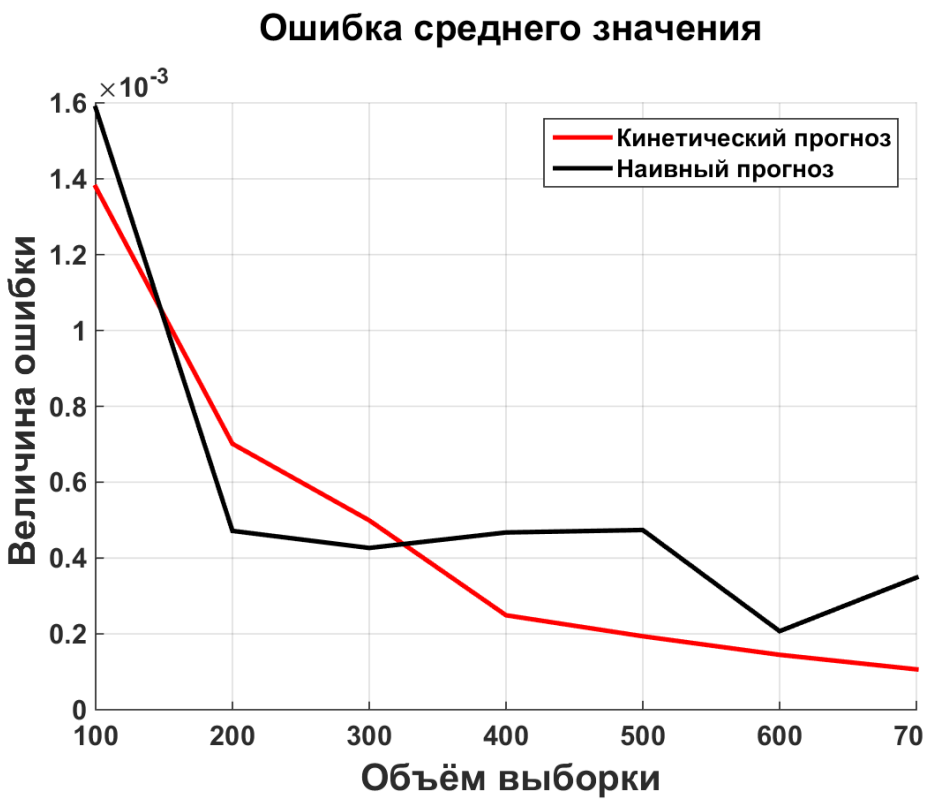
(14) $$error = M[X_t] - \widehat{M[X_t]} = R(h) + R(T) + R$$

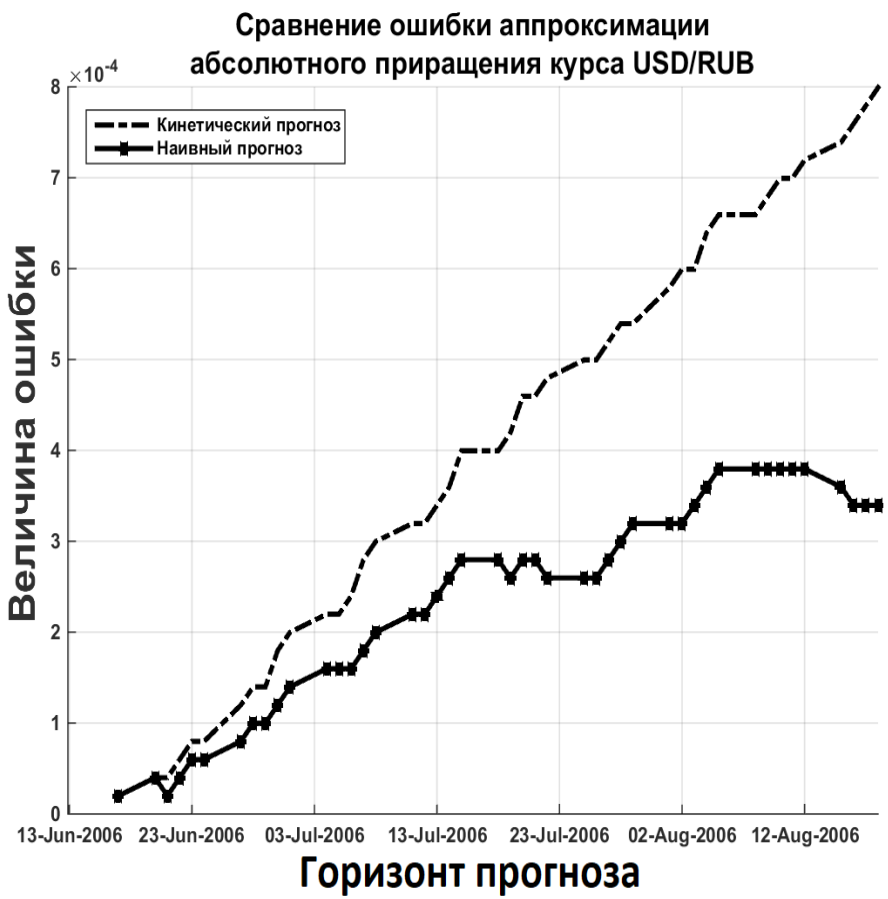
$$h = argmin(R(h)); T = argmin(R(T)); \quad R?$$

$h -$ *горизонт прогноза*

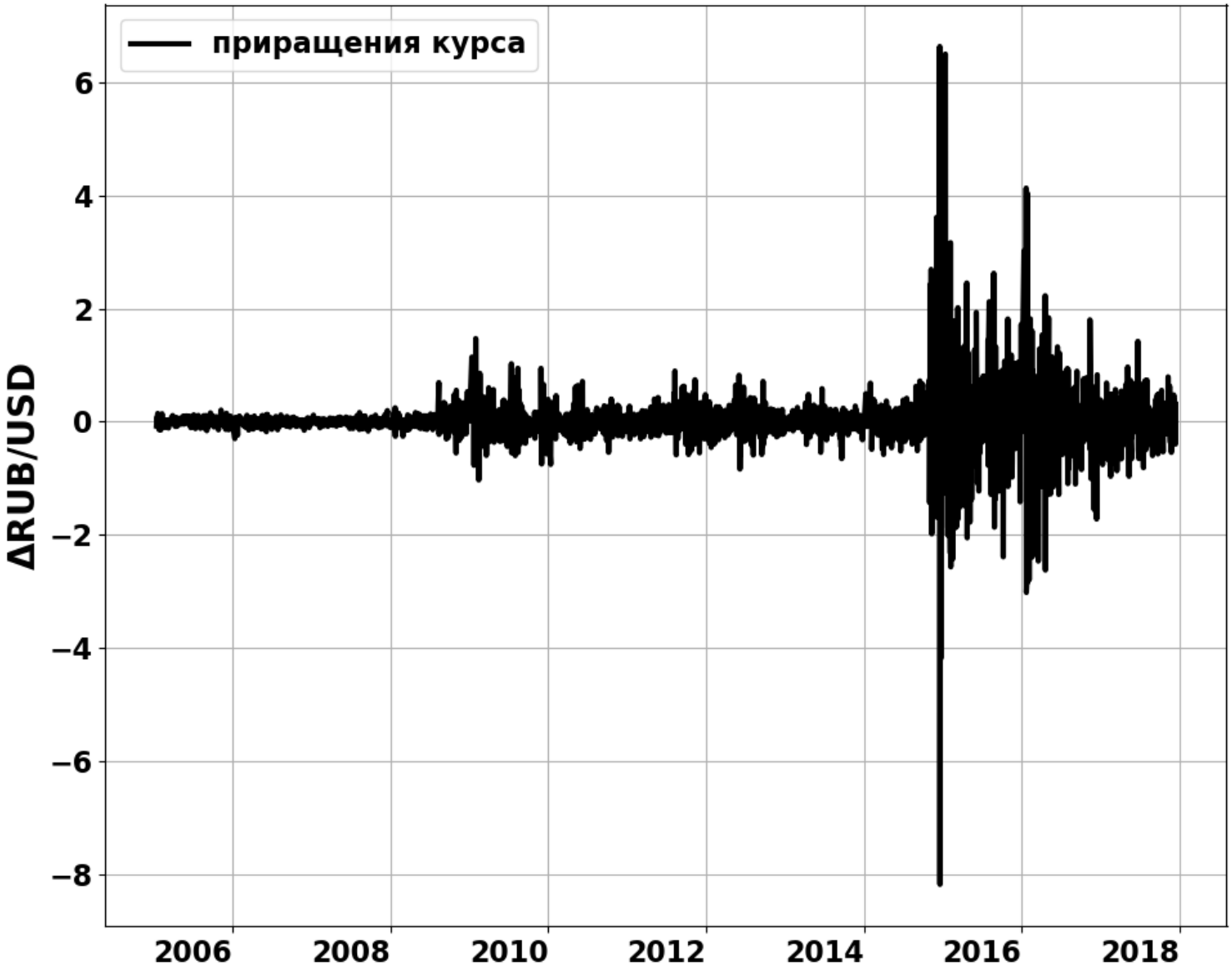
$T -$ *длина исследуемой реализации*

$C -$ *остальная погрешность*

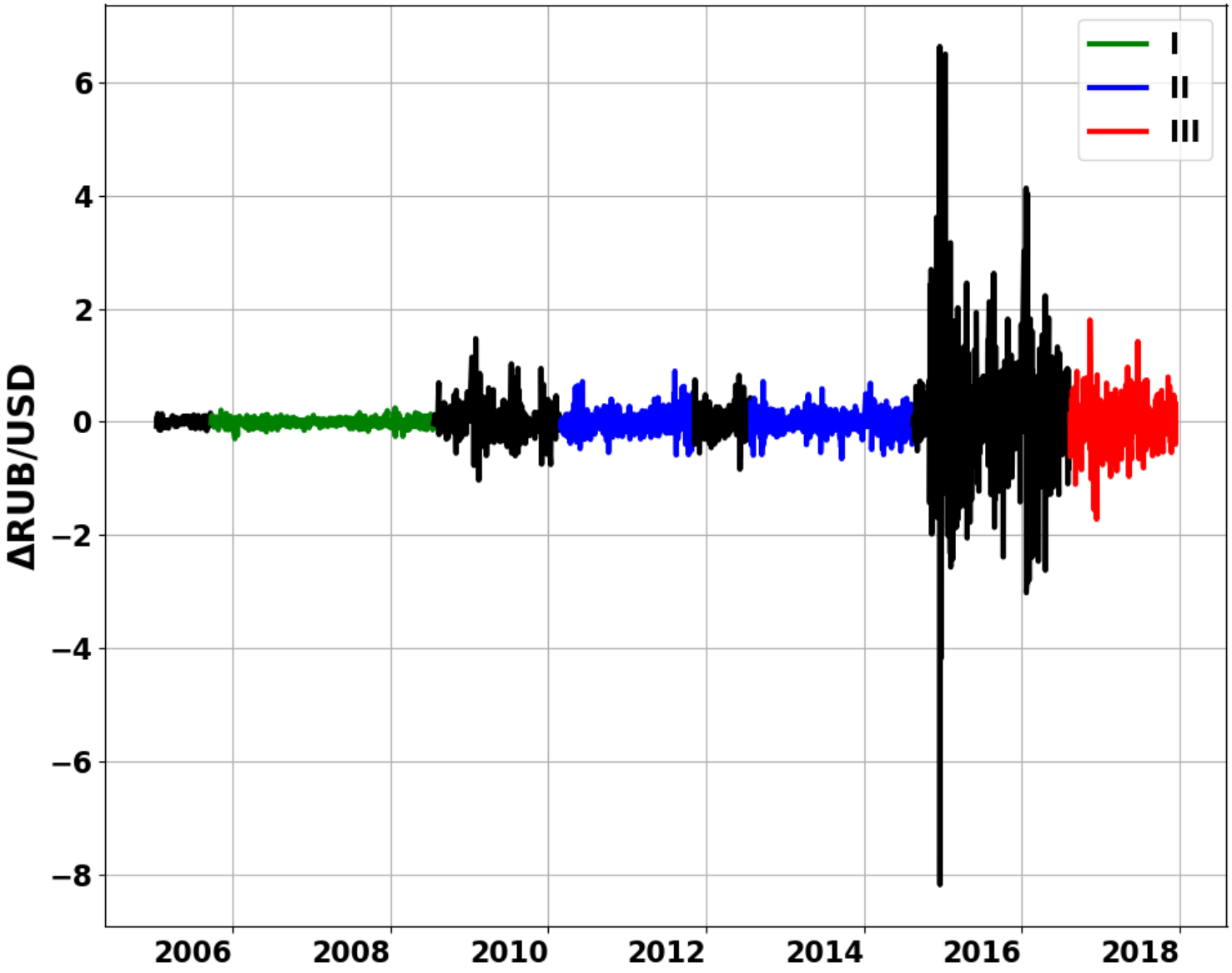




Исходные данные

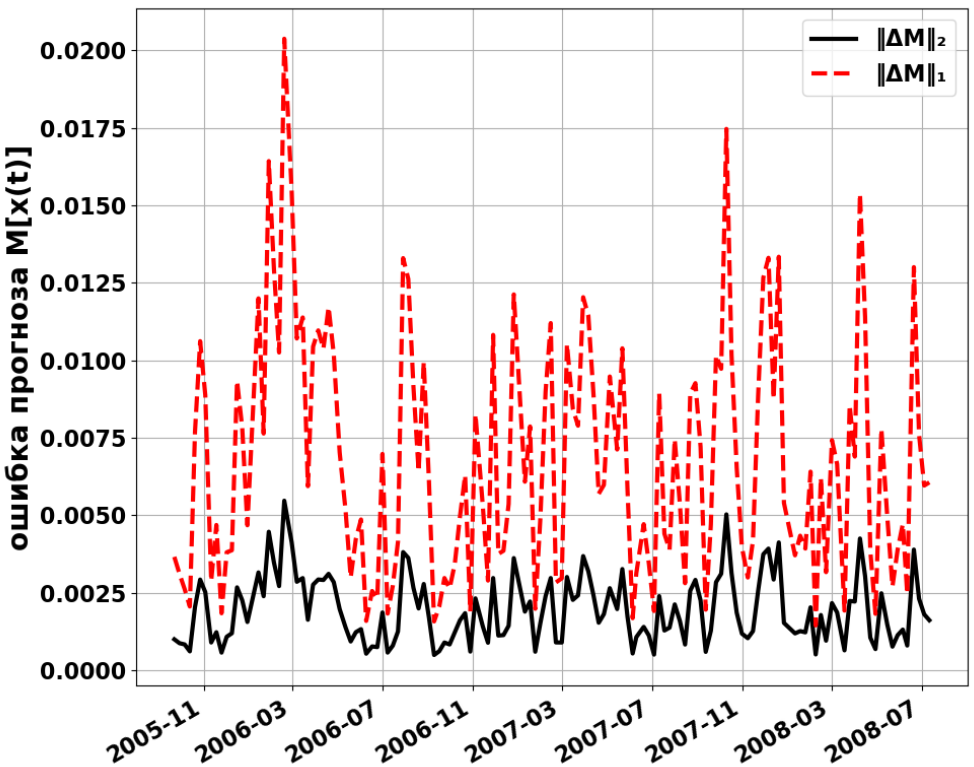


Исходные данные

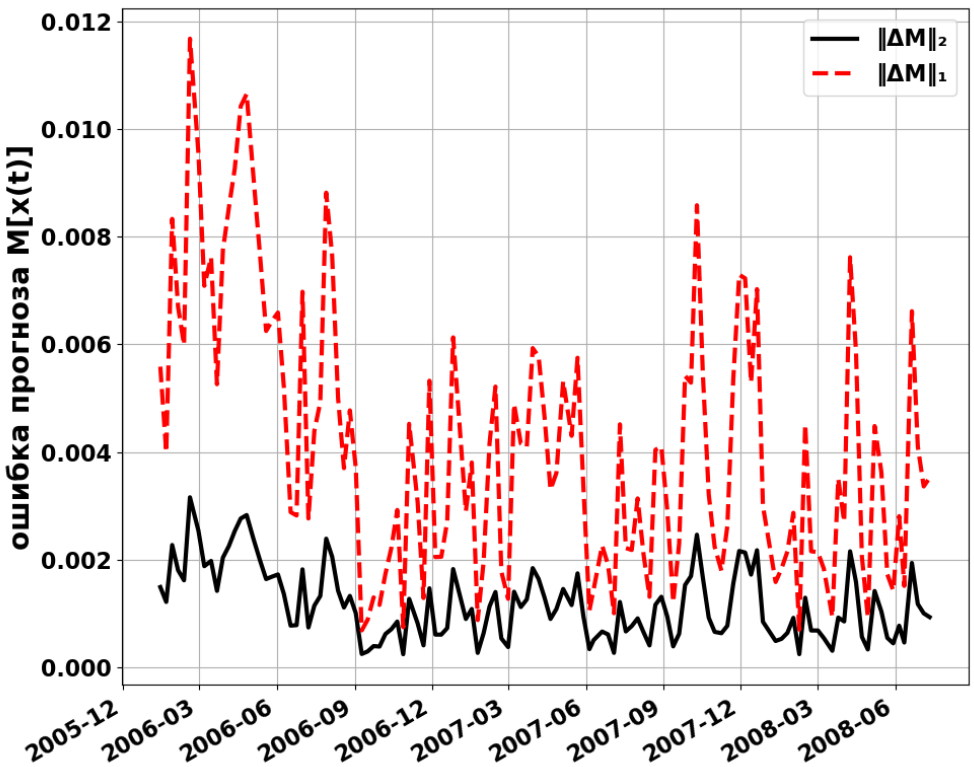


Ошибки прогноза среднего для в.р. ΔRUB/USD на первом участке

T=75



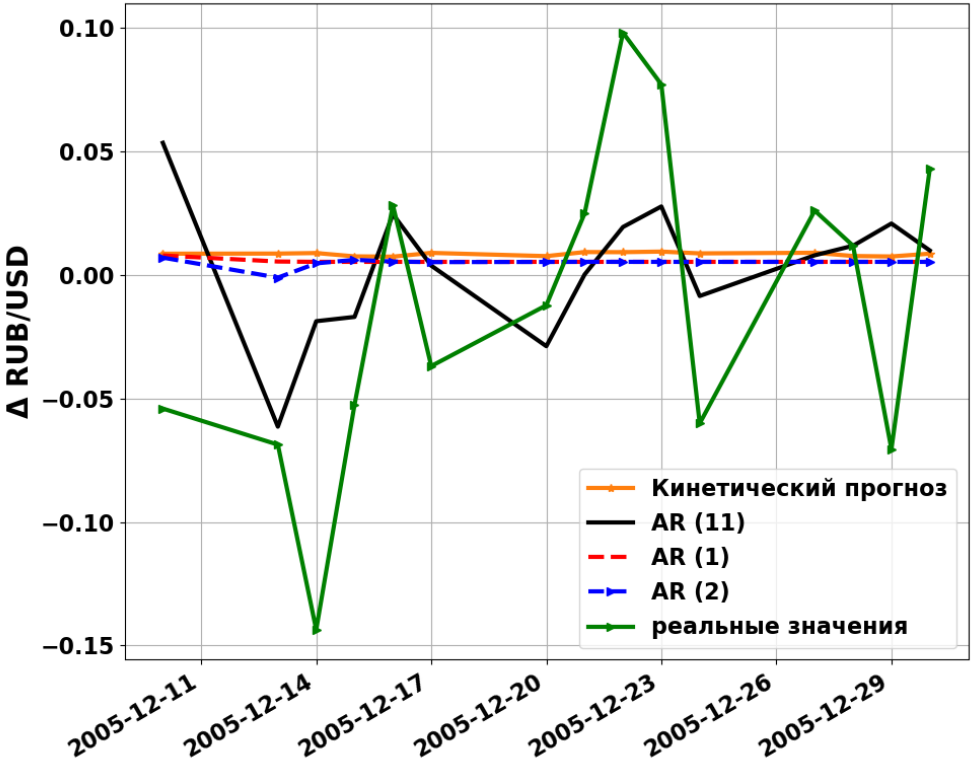
T=150



Пример одного конкретного прогноза

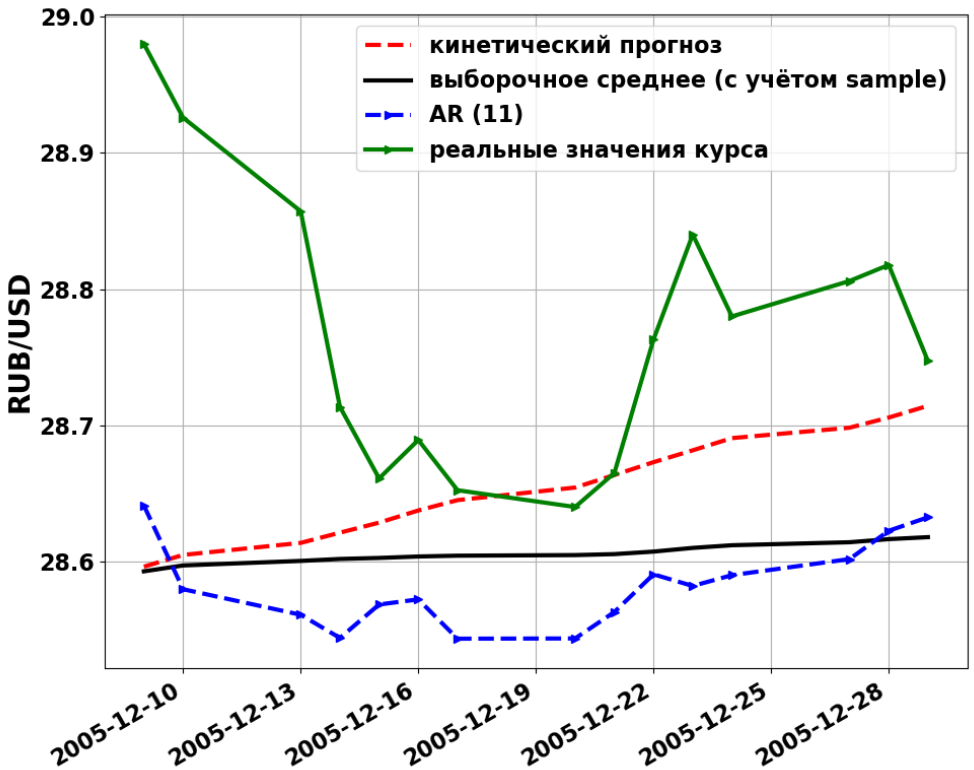
Зависимость ошибки ВПФР от **h**

Сравнение с A**R** моделями

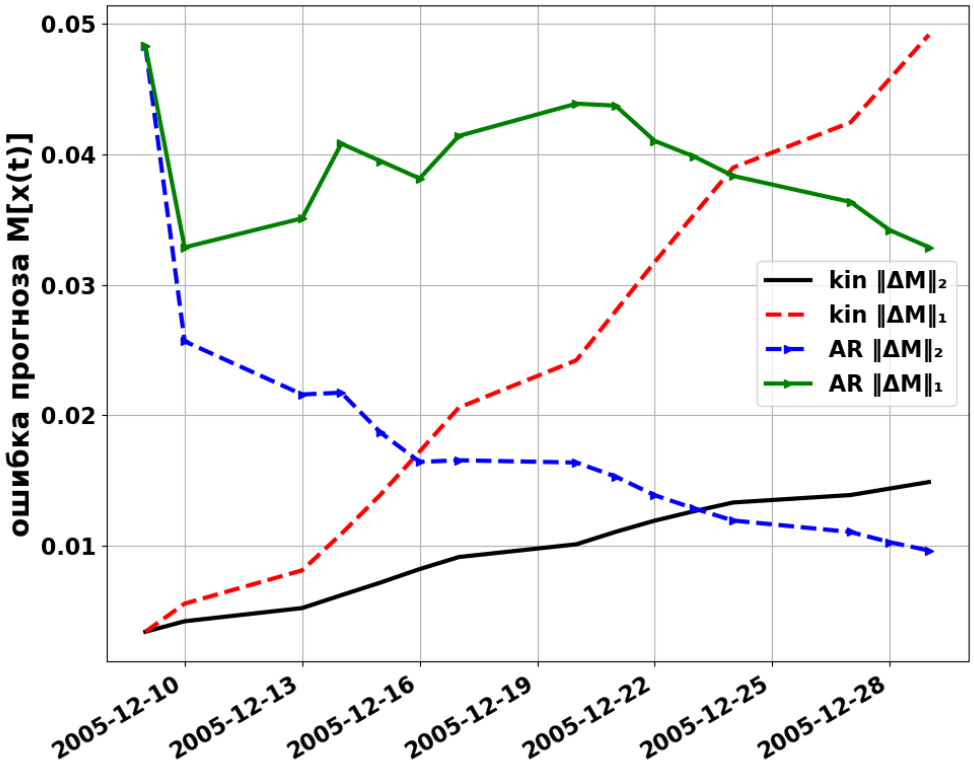


Возвращение к уровням в.р. RUB/USD

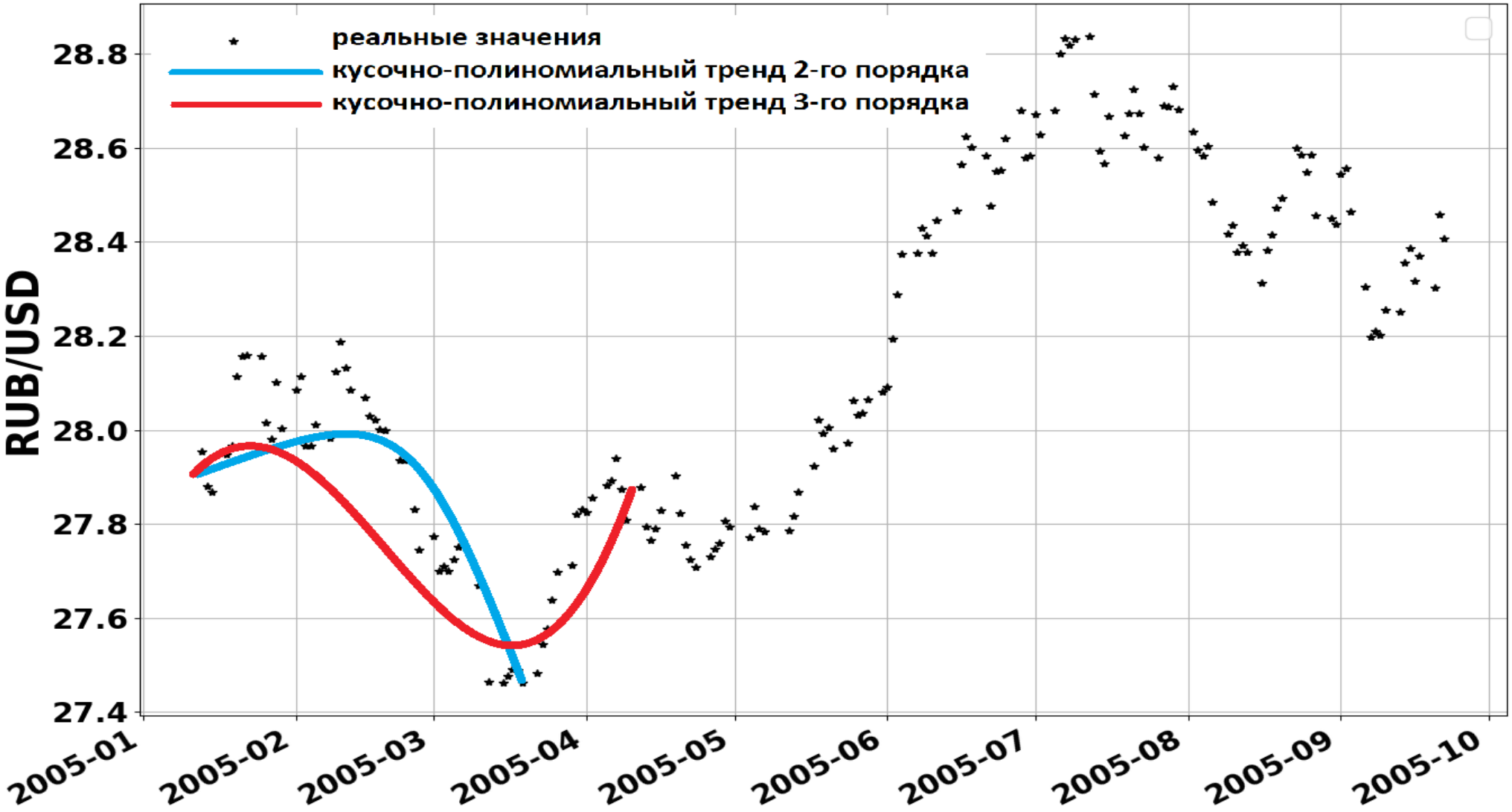
Сравнение с A**R** моделями



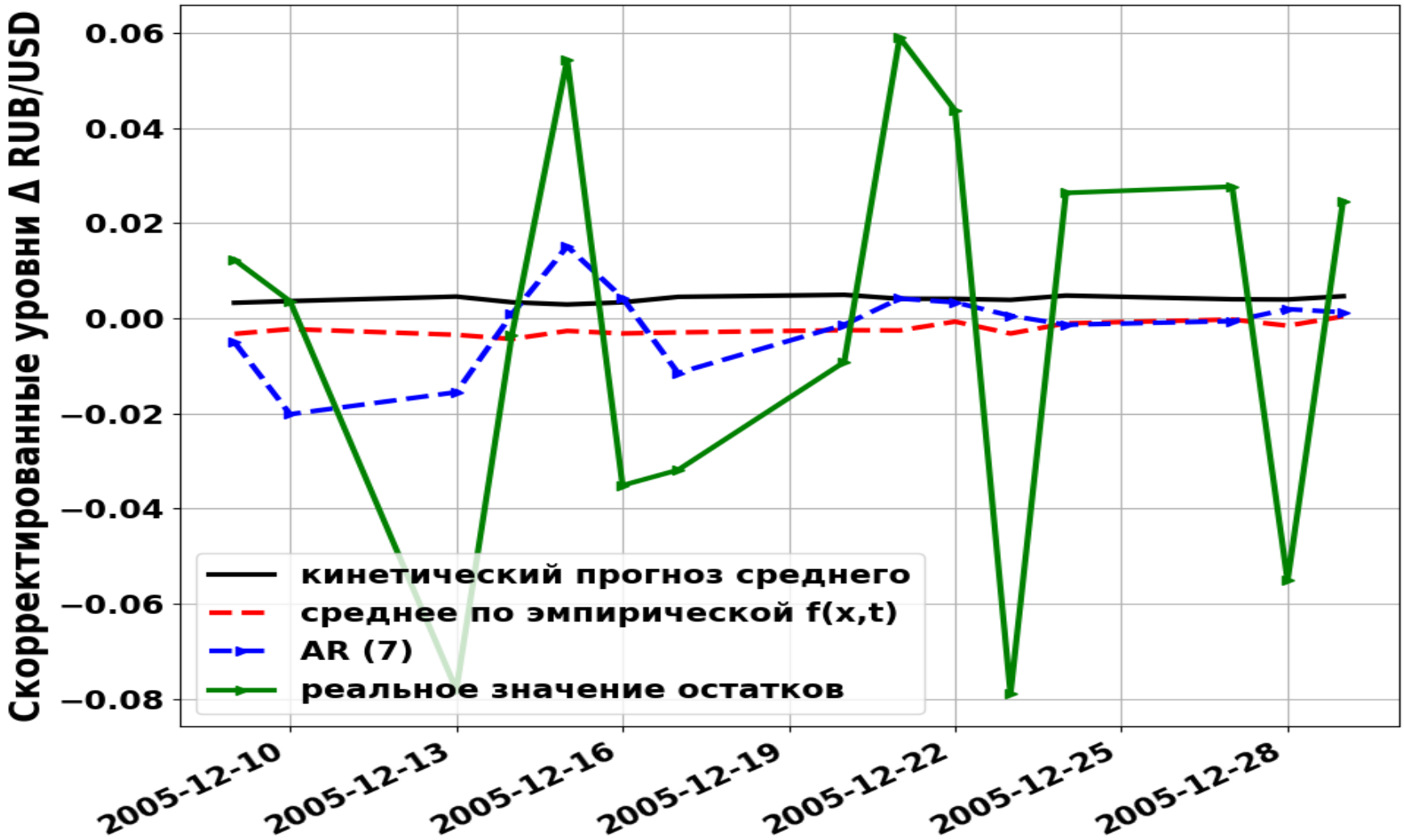
Ошибки прогноза среднего



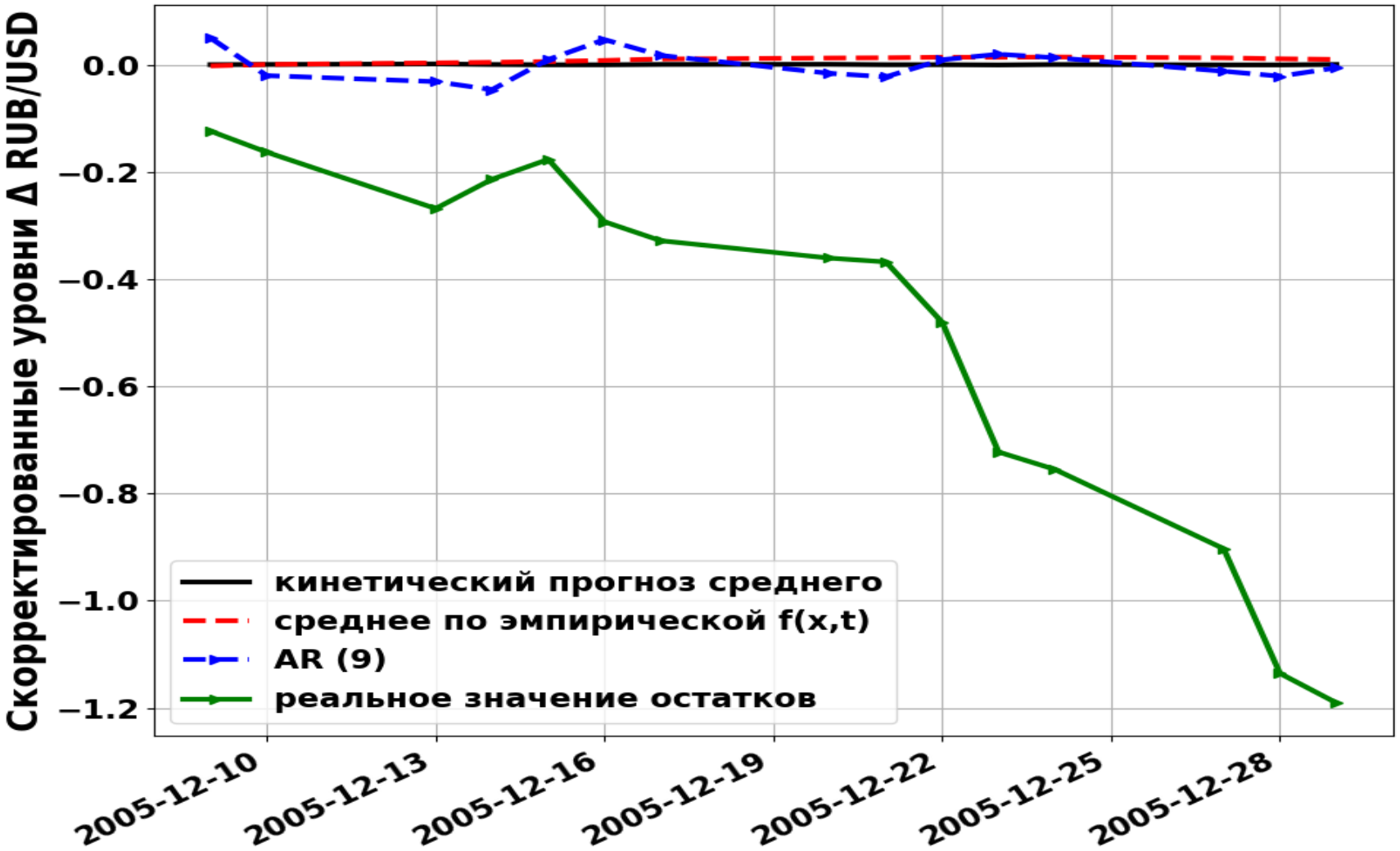
Исключение полиномиального тренда



Прогноз среднего для скорректированного в.р. ΔRUB/USD

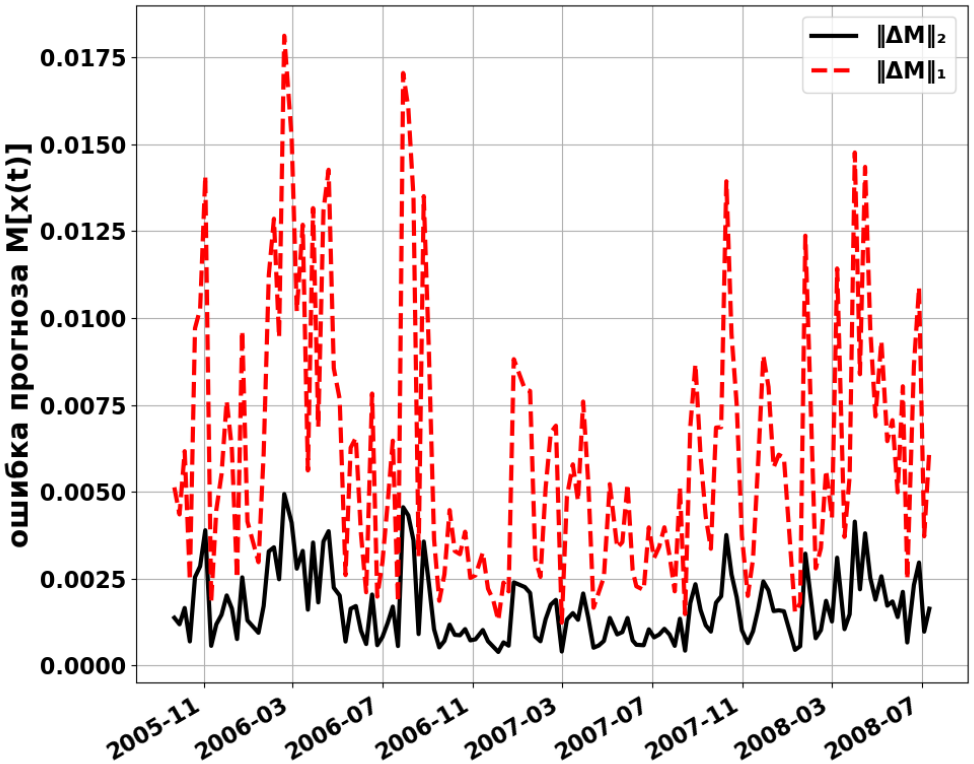


Прогноз среднего для ряда ΔRUB/USD скорректированного путём экстраполяции тренда

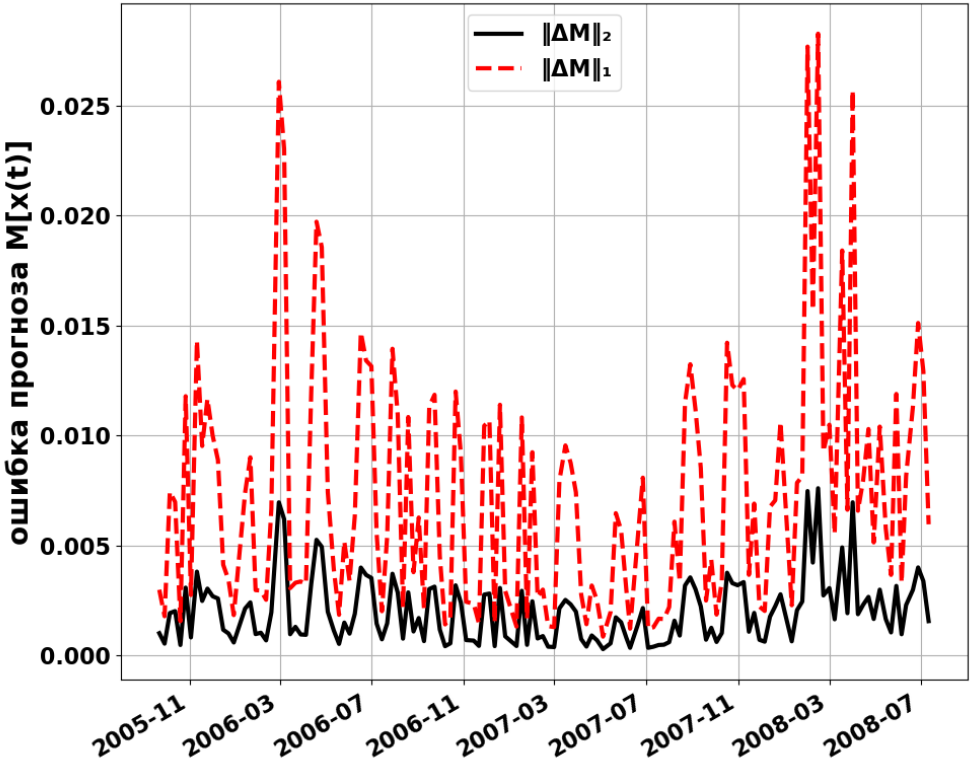


Ошибки прогноза среднего для скорректированного в.р. ΔRUB/USD

Без экстраполяции



С экстраполяцией



Нестационарность на последнем участке в.р. ΔRUB/USD

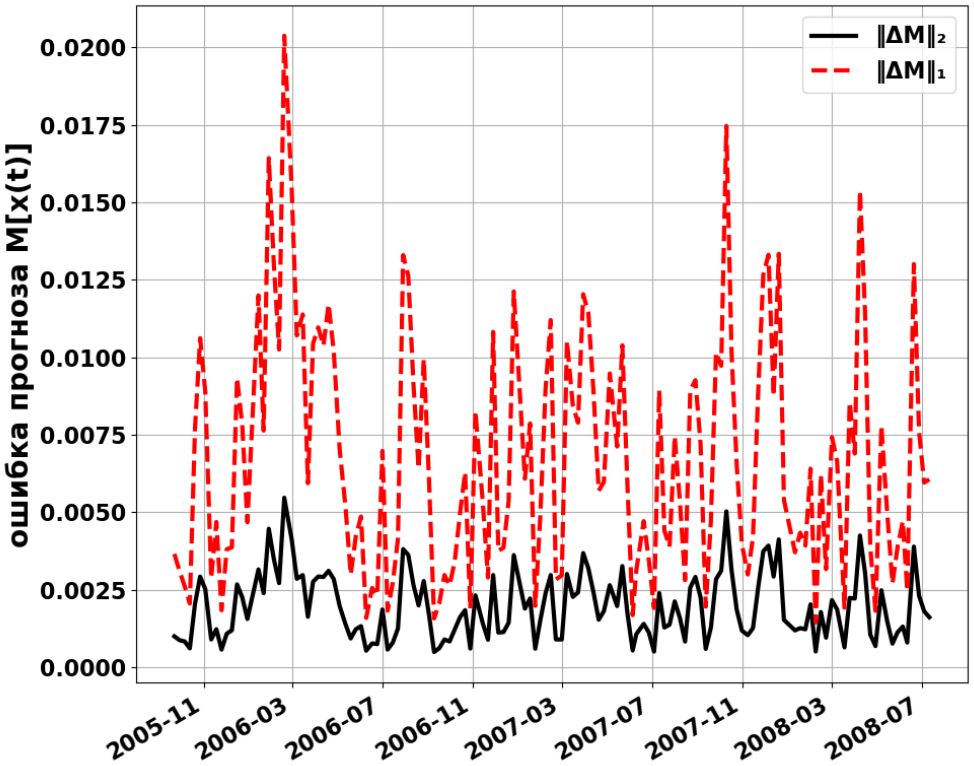
Условная дисперсия на всём в.р.

Результат проверки гипотез однородности на участке **с 04.09.14** по **14.12.17:**

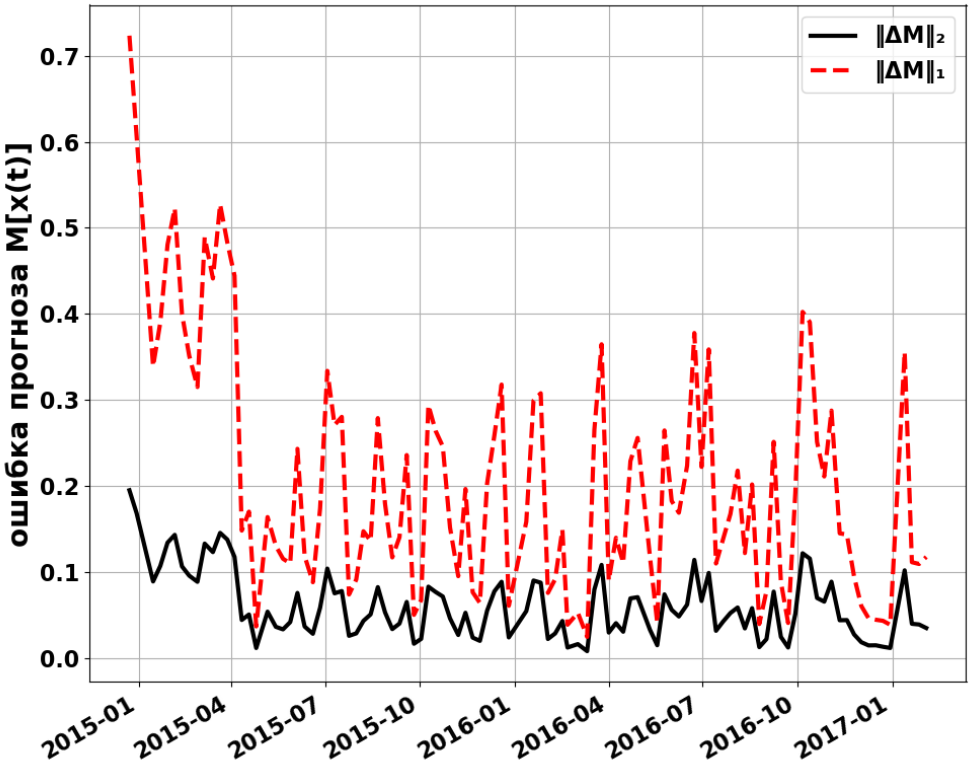
P-value = 0.05
Sample: true H0 of all
5: 12687 true of 13041
10: 2771 true of 3240
15: 1234 true of 1431
20: 640 true of 780
25: 388 true of 496
30: 278 true of 351
35: 195 true of 253
40: 138 true of 190

Сравнение ошибок прогноза среднего для первого и третьего участков в.р. ΔRUB/USD

Первый участок



Третий участок



Выводы

- На квазистационарных участках кинетический подход позволяет построить прогнозы среднего, не уступающие по качеству прогнозам, которые доставляют нам типичные AR-модели (p=1,2,3).

- Качество прогнозов среднего остаётся приемлемым в рамках одной торговой недели. Если замыкание системы зацепленных уравнений основано на предположении о квазистационарности участка, то горизонт прогноза более двух торговых недель нецелесообразен.

- Причина, по которой последний участок в.р. RUB/USD нельзя классифицировать как интегрируемый даже второго порядка, качественно объясняется неспособностью регулятора выполнять свои функции. Судя по нашим оценкам, на этом участке регулятор способен лишь эпизодически нивелировать большие движения курса.

Формальная постановка задачи

- Дано: $X_N = \{x_t\}, \qquad t = 0..\mathrm{N}$
- Построить: $A[X_N, t] = \tilde{f}(t, x), \quad x = 0..1, \quad t = N+1..\tau$
- Оценить $F[\tilde{f}(t, x)]$, например: $\tilde{\bar{x}}_t = \sum x \tilde{f}(x, t)$

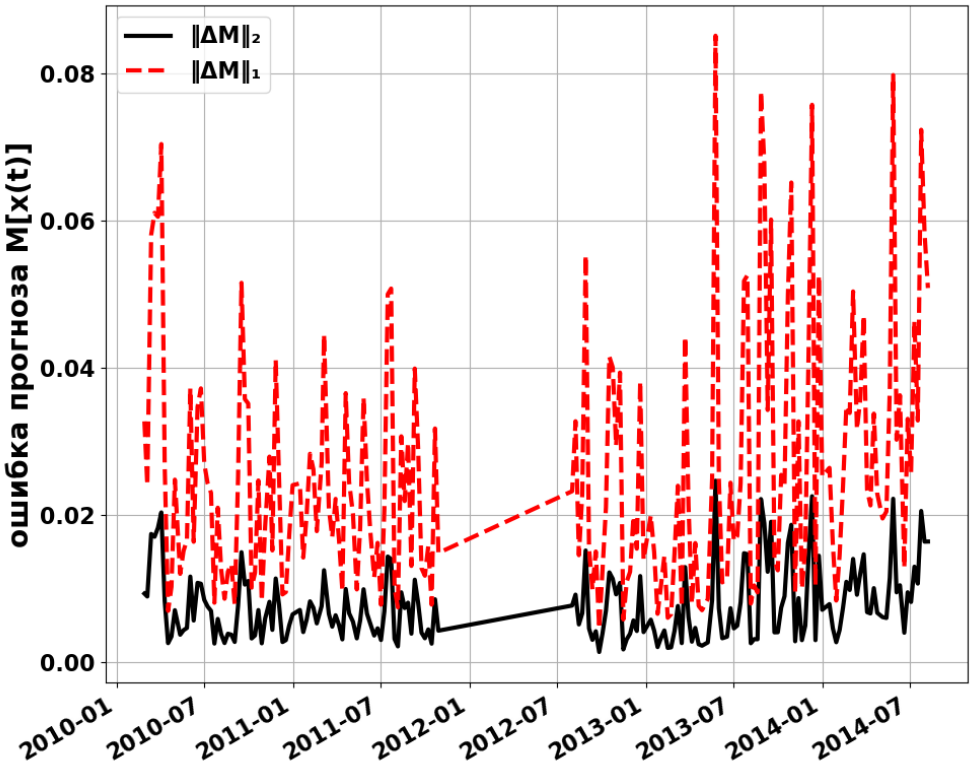
Орлов Ю.Н., Осминин К. П. Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. М:Эдиториал УРСС, 2011. - 384с.

Нестационарность на последнем участке в.р. ΔRUB/USD

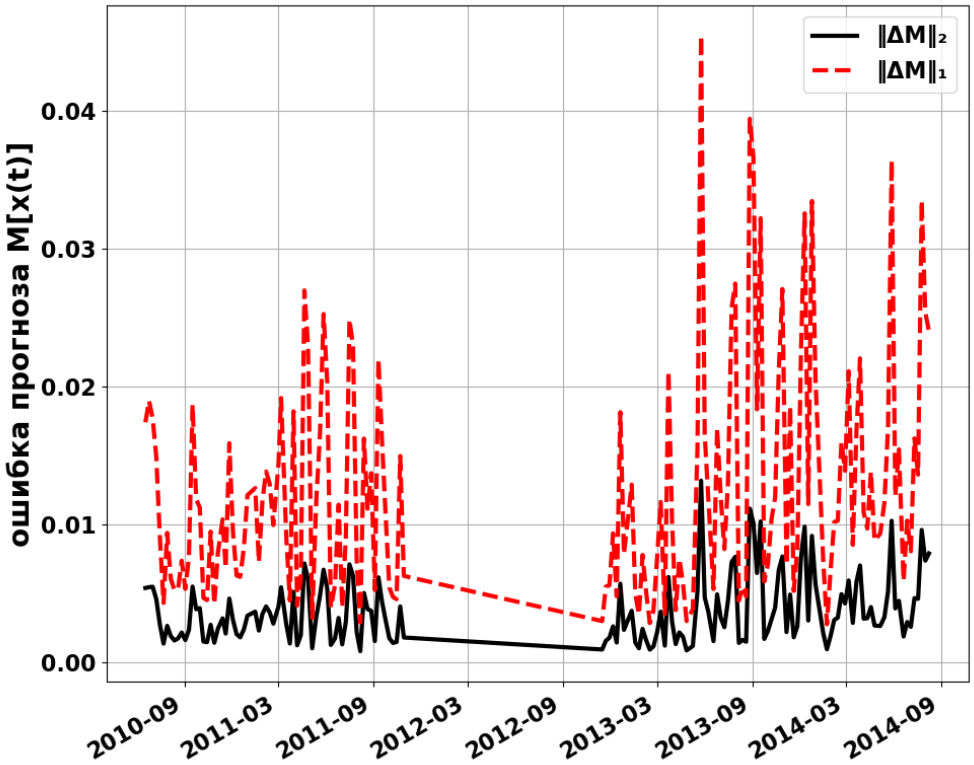
```
sample = 20
1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1
  1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0
    1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1
        0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
          1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
            1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
              1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
                1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                  1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1
                    0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1
                      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                        1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                          1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                            1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0
                              1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
                                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                  1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0
                                    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1
                                          1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1
                                            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1
                                                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                                  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1
                                                    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                                      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                                        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                                          1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                                            1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                                              1 1 1 1 1 1 1 1
                                                                1 1 1 1 1 1 1
                                                                  1 1 1 1 1 1
                                                                    1 0 1 1 1
                                                                      1 1 1 1
                                                                        1 1 1
                                                                          1 1
                                                                            1
640 true H0 of total 780
```

Ошибки прогноза среднего для в.р. ΔRUB/USD на втором участке

T=75

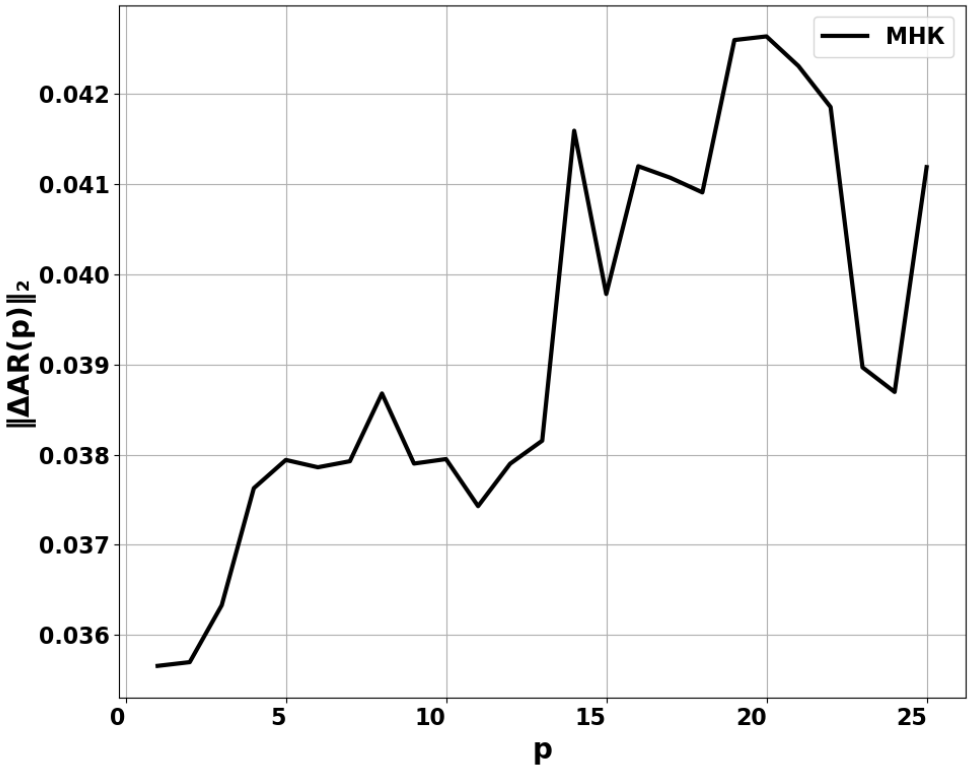


T=150

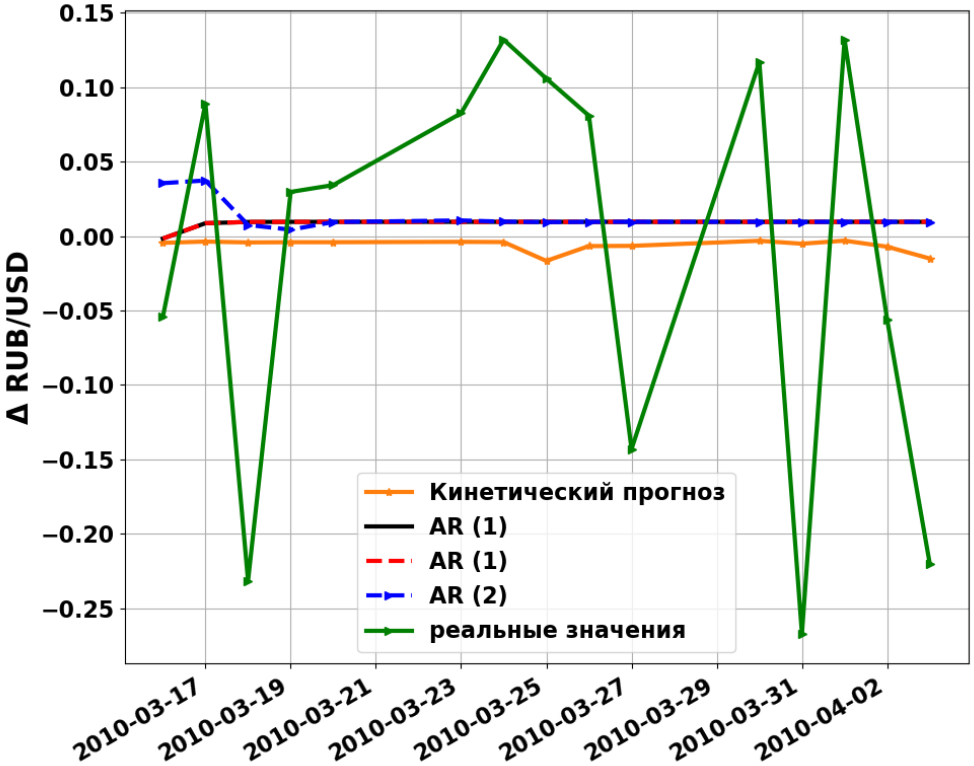


Сравнение кинетического и AR прогнозов среднего в.р. ΔRUB/USD на втором участке (1)

Оптимальный порядок **AR**

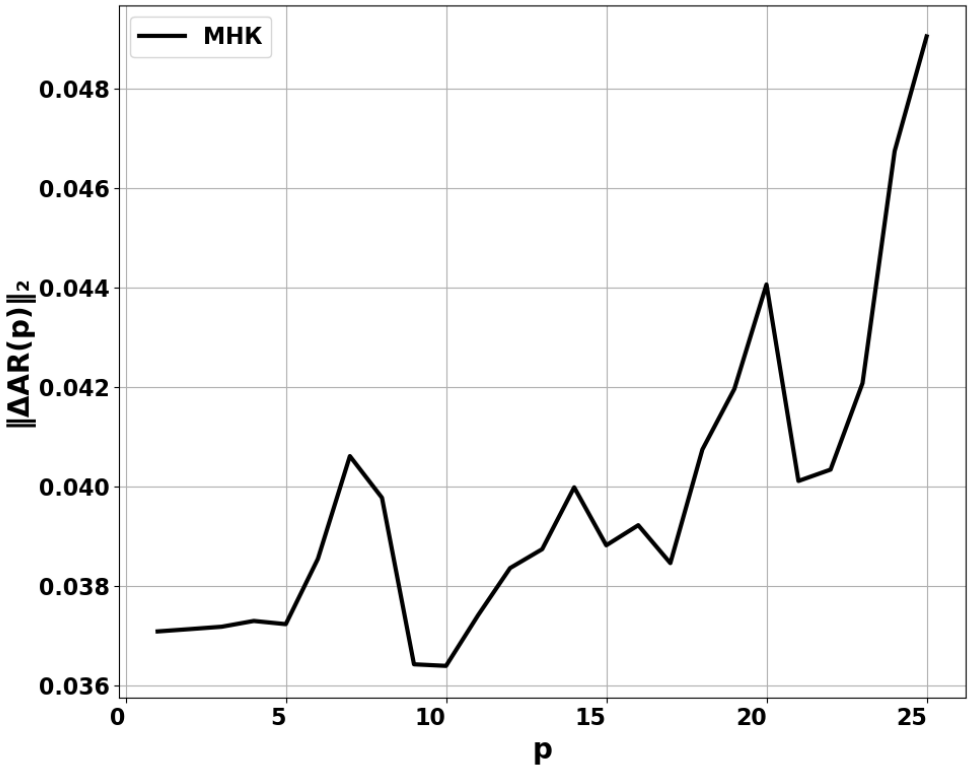


Сравнение с **AR** моделями

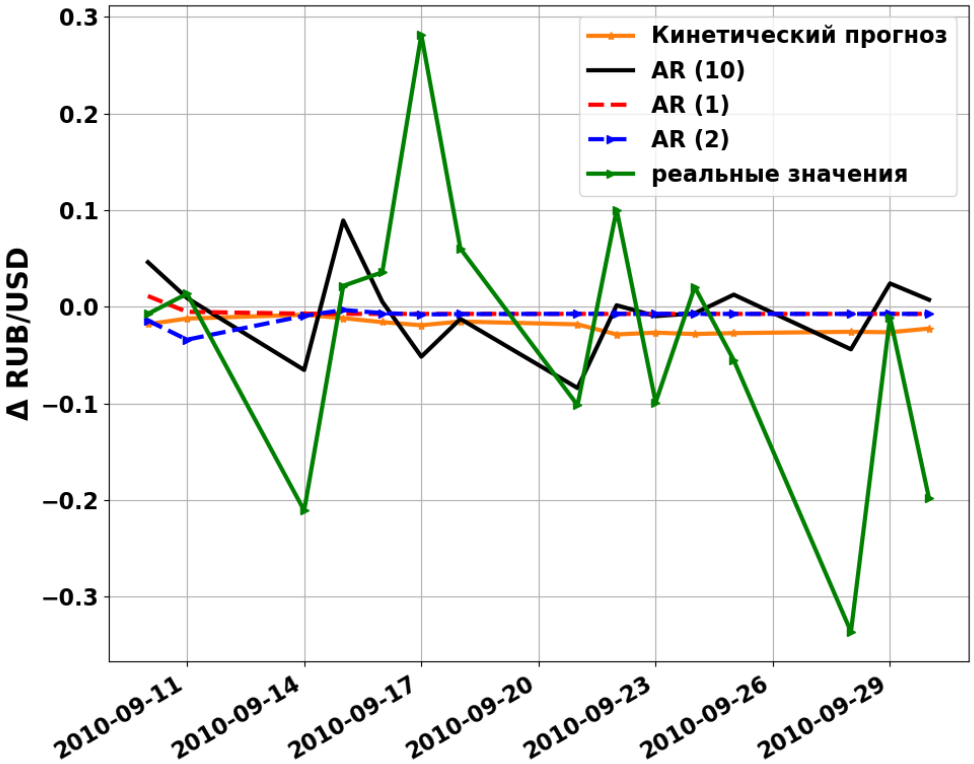


Сравнение кинетического и AR прогнозов среднего в.р. ΔRUB/USD на втором участке (2)

Оптимальный порядок **AR**

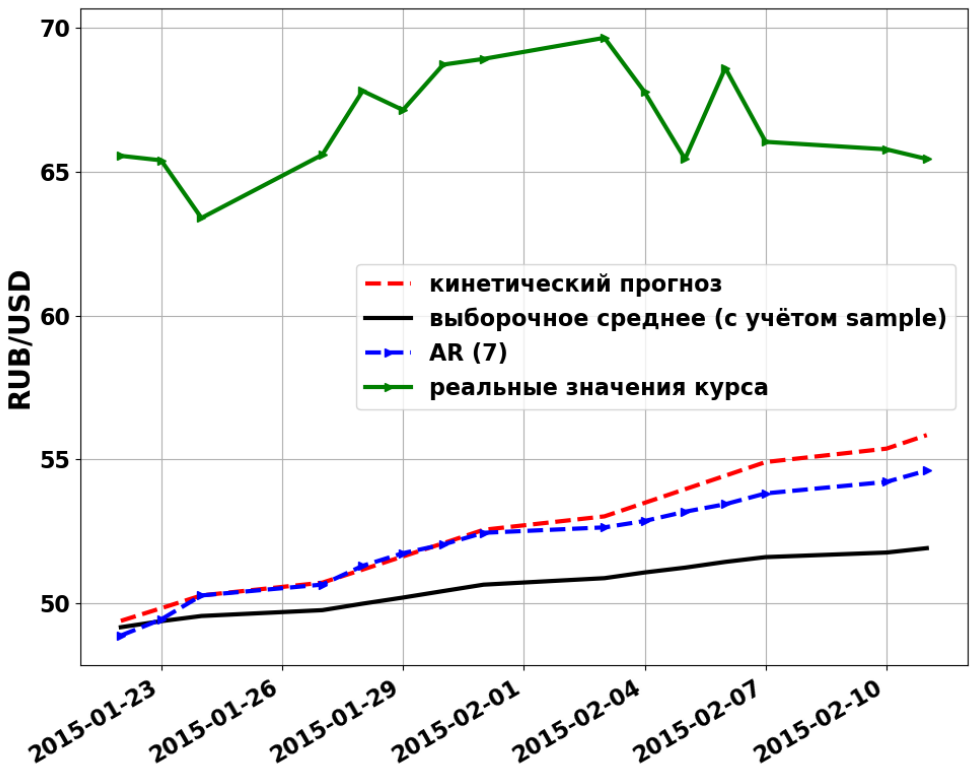


Сравнение с **AR** моделями

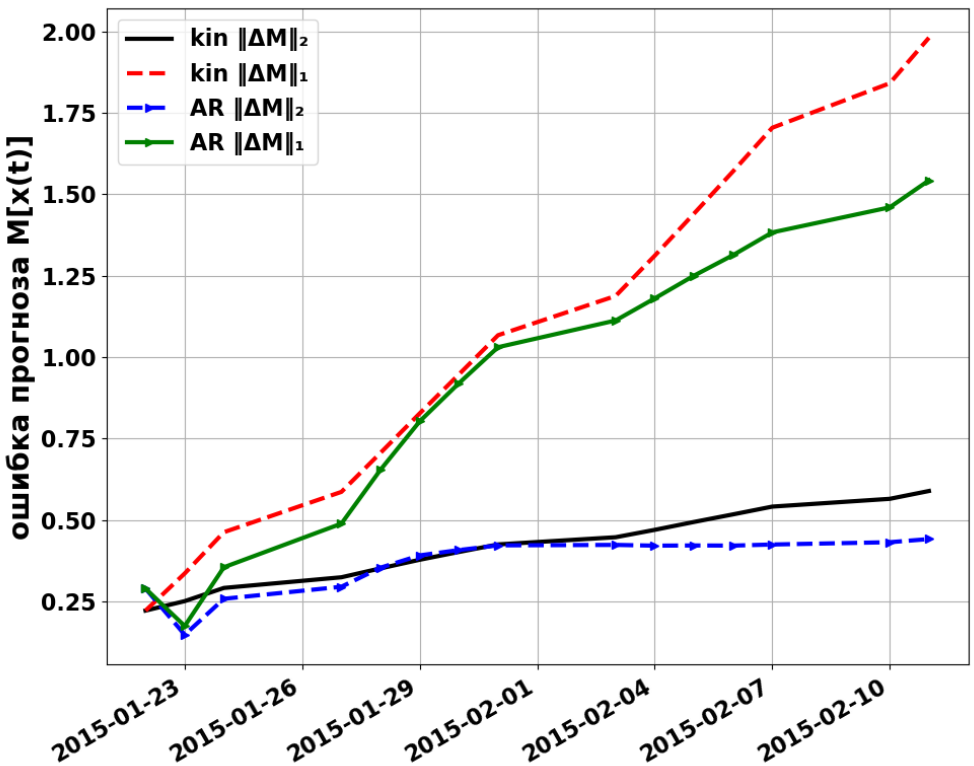


Возвращение к в.р. RUB/USD на третьем участке (1)

Сравнение с A**R** моделями

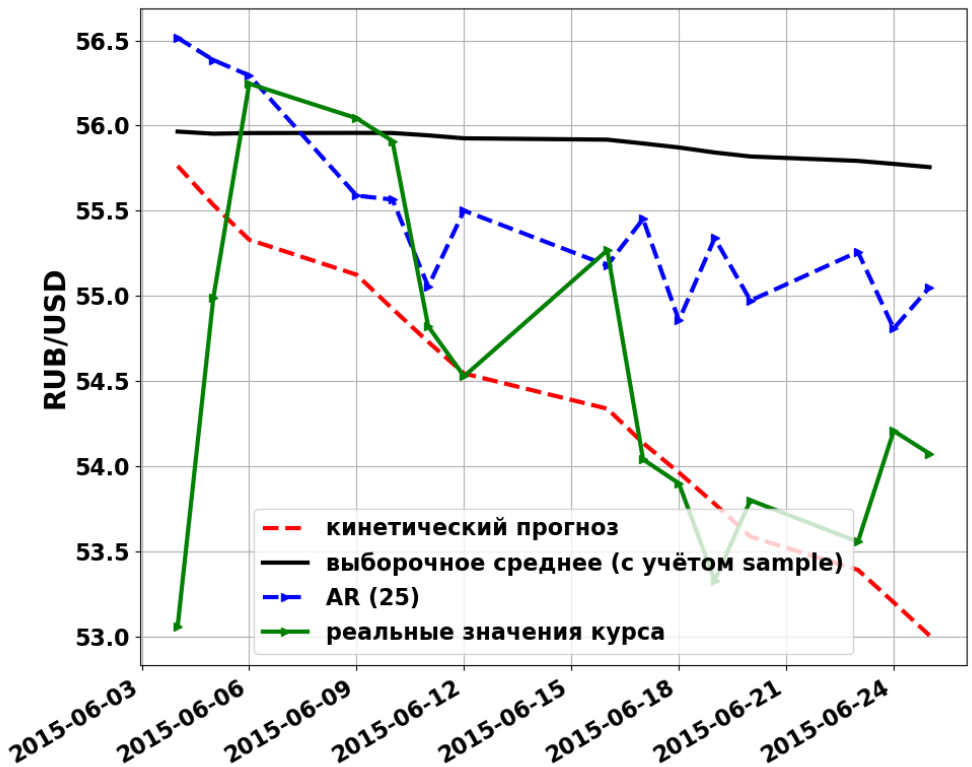


Ошибки прогноза среднего

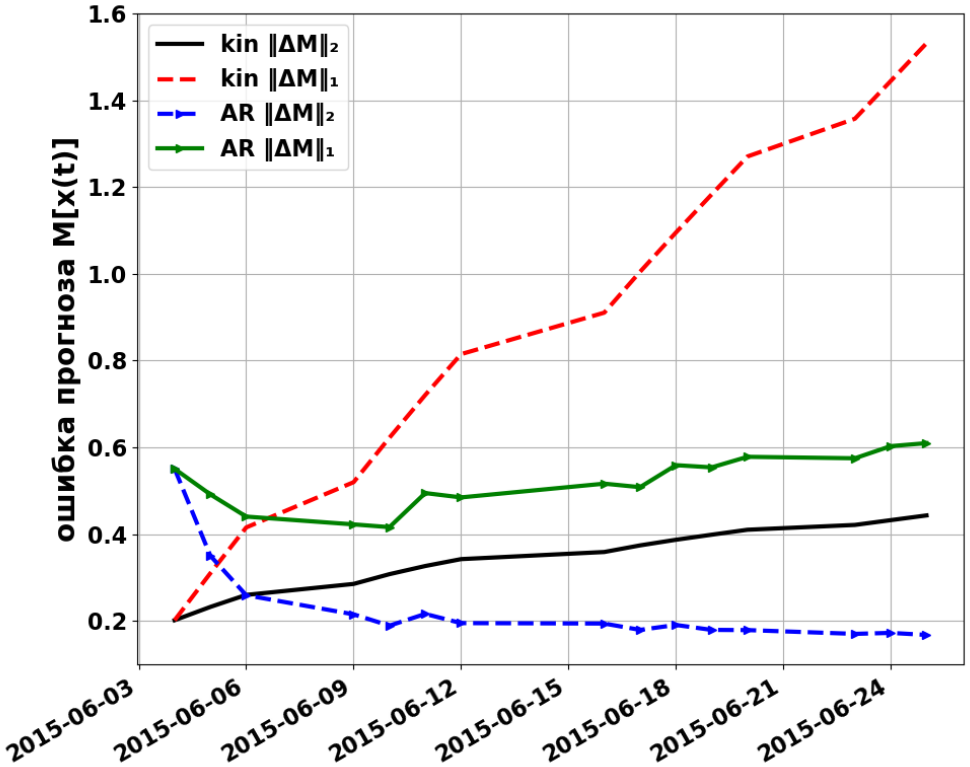


Возвращение к в.р. RUB/USD на третьем участке (2)

Сравнение с A**R** моделями

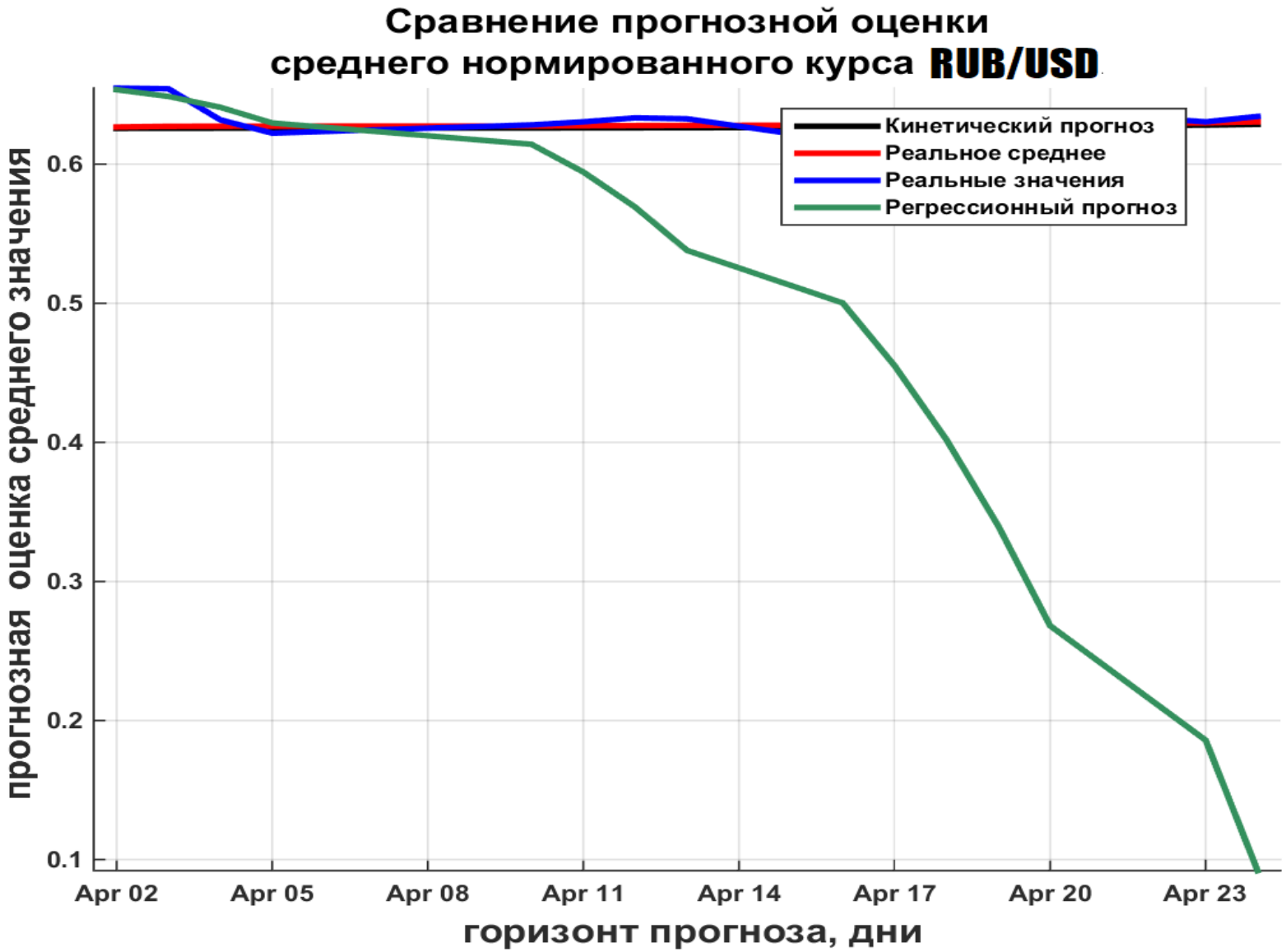


Ошибки прогноза среднего

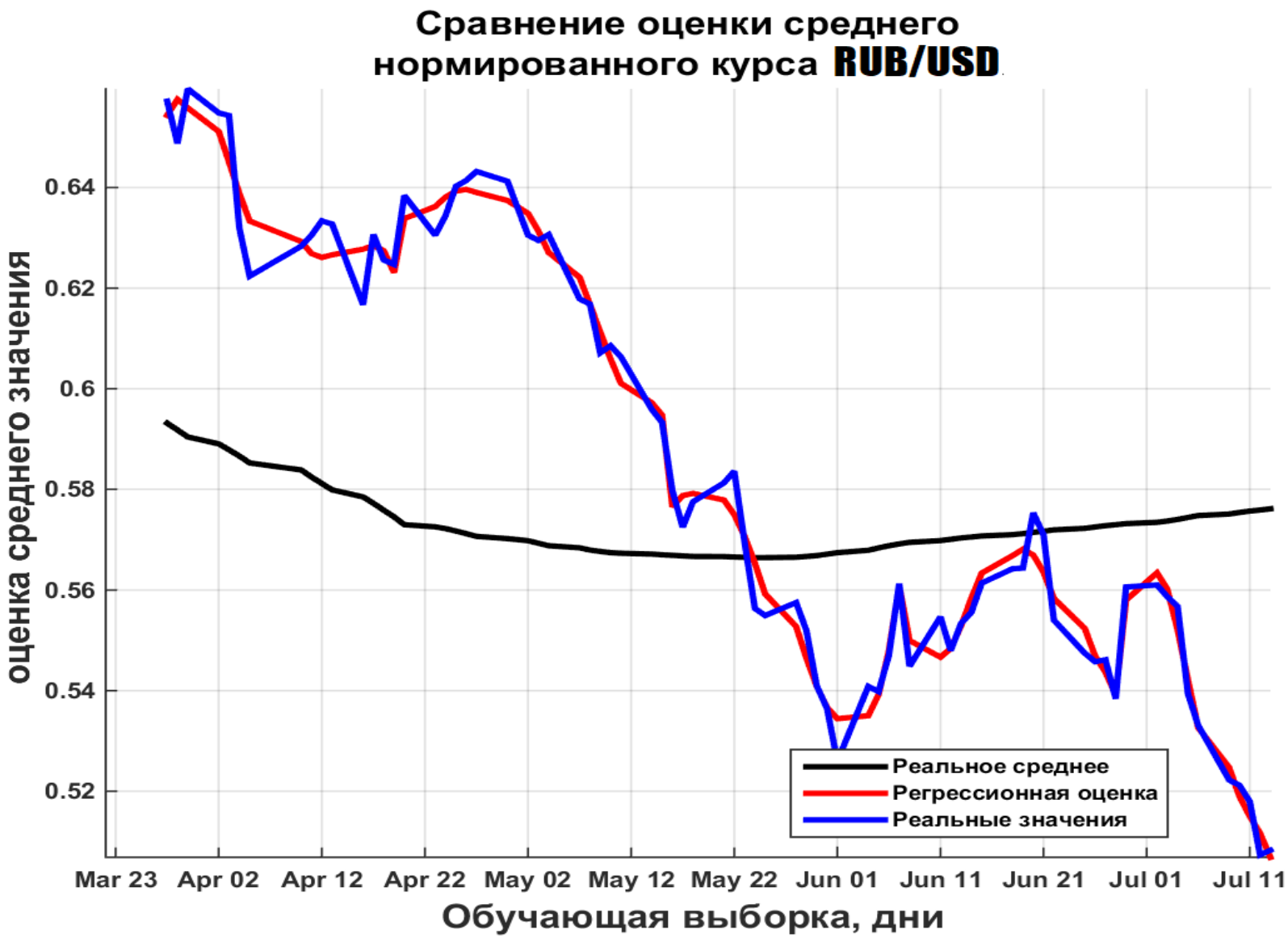


Полиномиальный тренд на обучающей выборке (1)

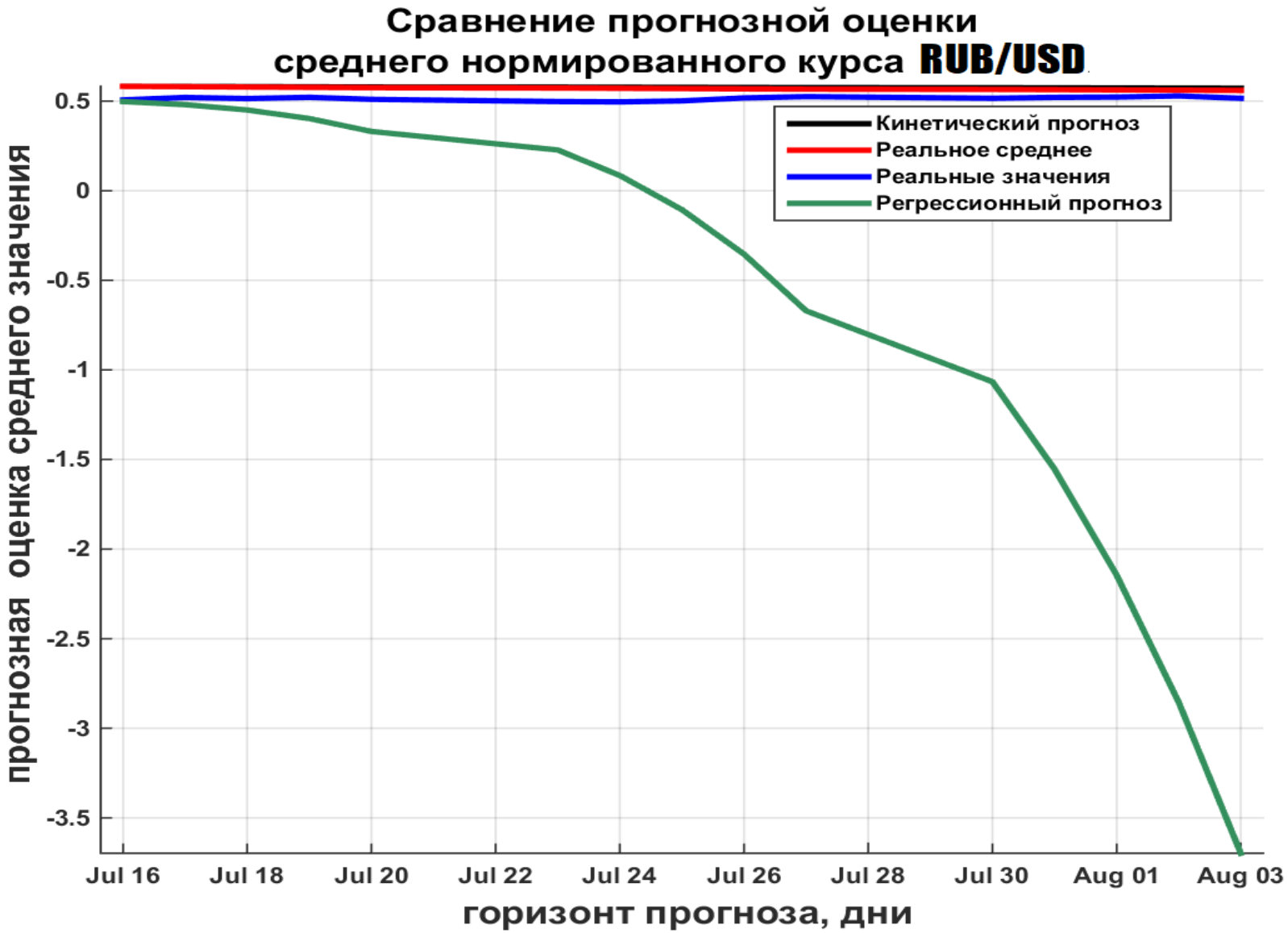
Полиномиальный тренд на горизонте прогноза (1)



Полиномиальный тренд на обучающей выборке (2)



Полиномиальный тренд на горизонте прогноза (2)

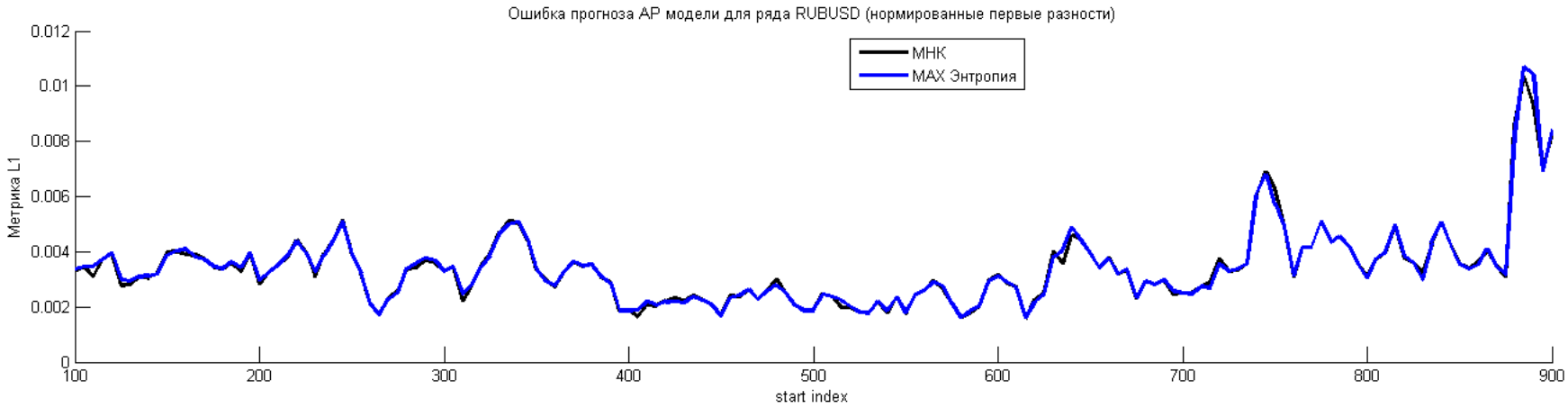


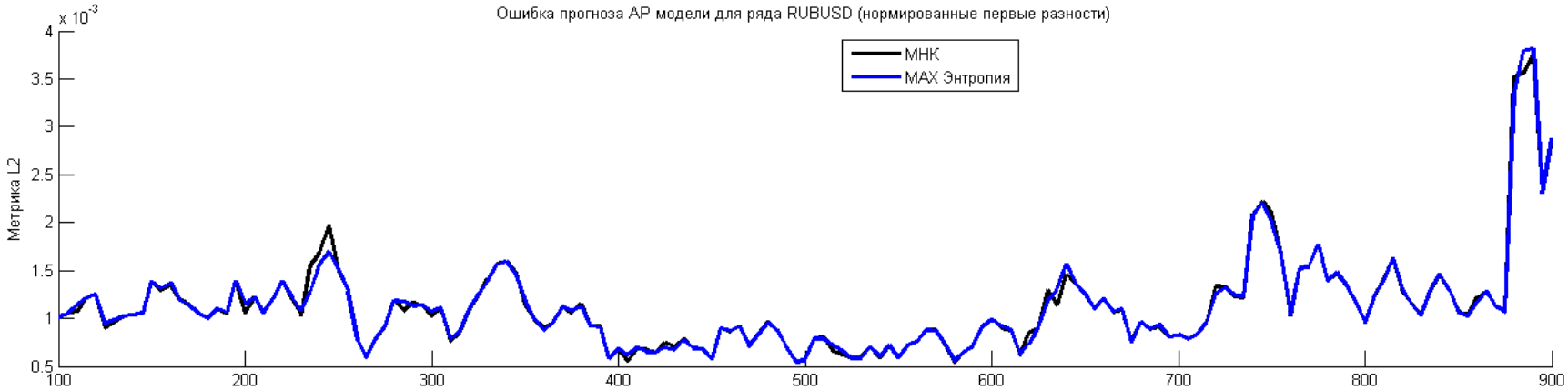
Проверка гипотезы о статистической устойчивости коэффициентов кусочно-полиномиальной регрессии на третьем участке

```
--2--
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
    1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
      1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
        0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0
          1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
            1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                  1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                    1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0
                      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                        1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1
                          1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
                            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                    0 0 1 0 1 0 0 1 1
                                      1 0 1 1 0 1 1 0
                                        1 1 1 1 1 1 0
                                          1 1 1 1 1 1
                                            1 1 1 1 1
                                              1 1 1 1
                                                1 1 1
                                                  1 1
                                                    1
289 of 378
```

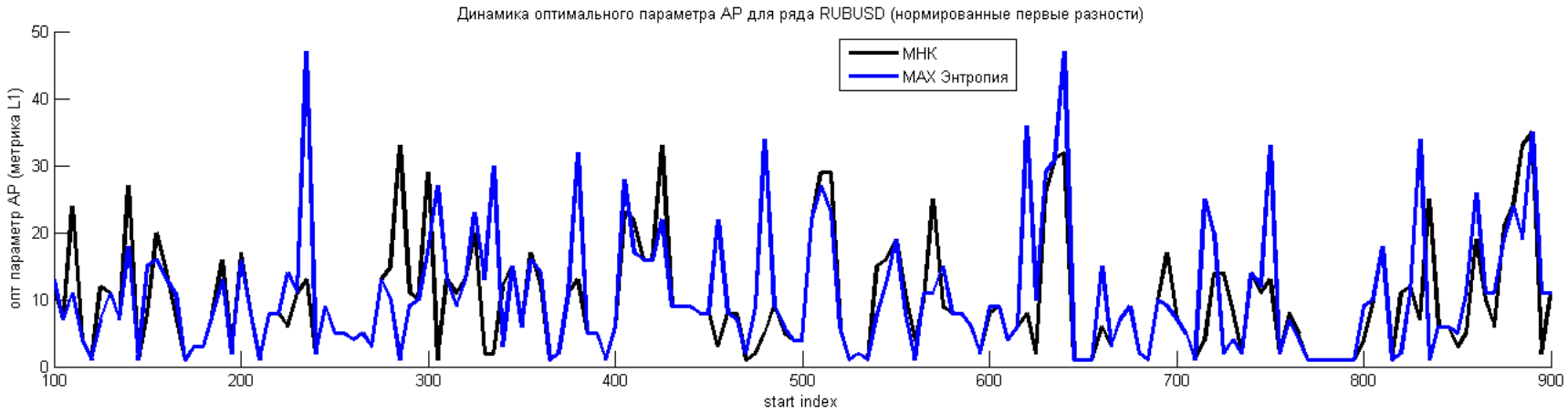
```
--3--
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
    1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
      1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
        0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1
          1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
            1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                  1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                    1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0
                      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                        1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1
                          1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
                            1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                              1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
                                  0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
                                    0 0 1 0 1 1 1 1 1
                                      1 0 1 1 0 1 1 0
                                        1 1 1 1 1 1 0
                                          0 1 1 1 1 1
                                            1 1 1 1 0
                                              1 1 1 1
                                                1 1 1
                                                  1 1
                                                    1
296 of 378
```

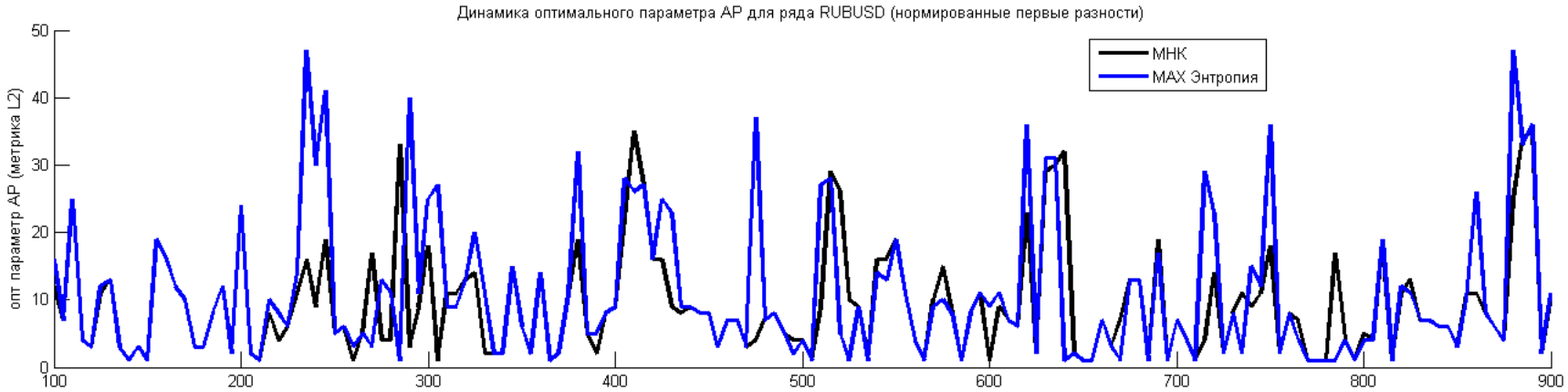
Ошибка оптимального AR прогноза среднего в.р. ΔRUB/USD



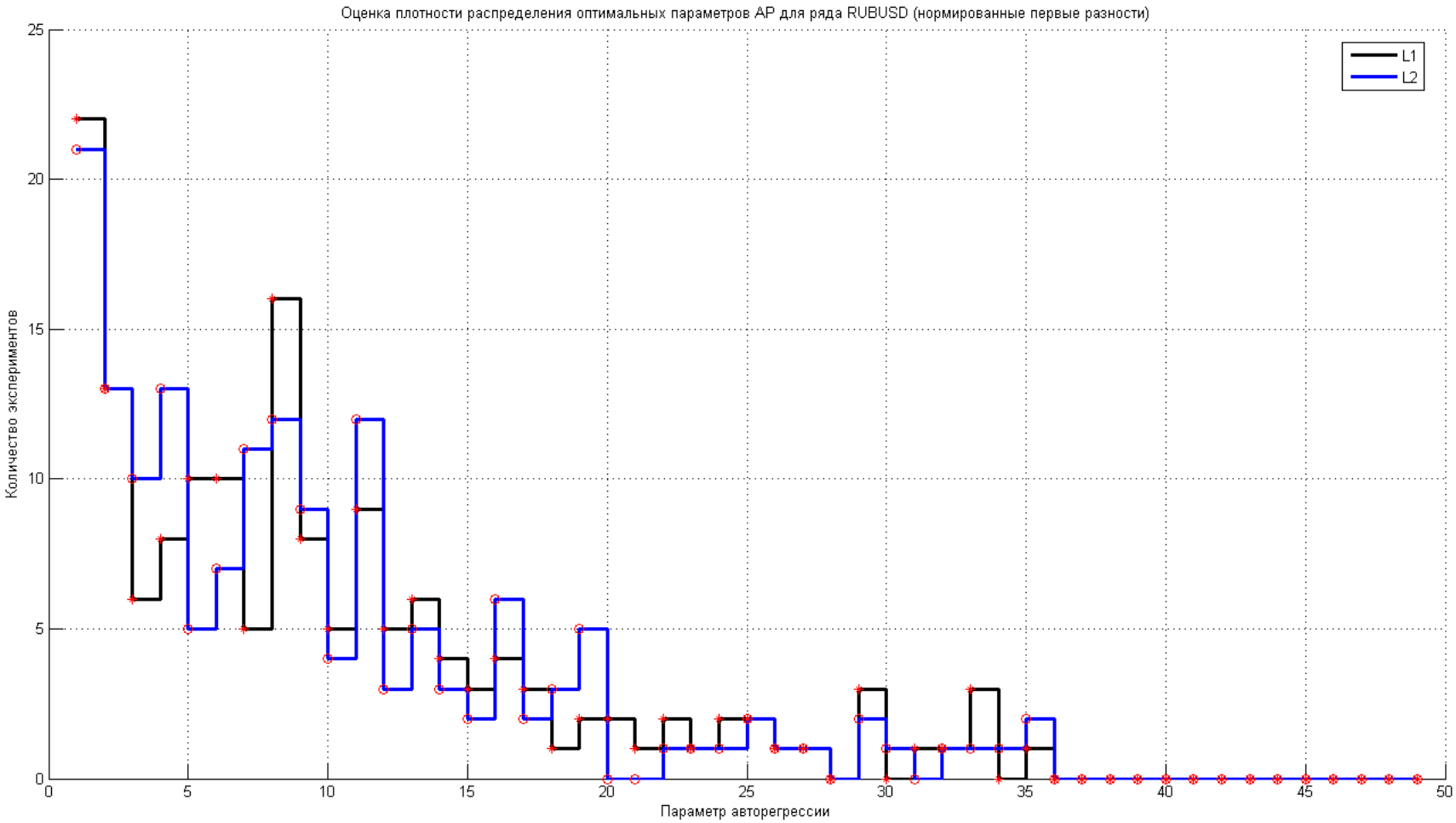


Оптимальный порядок авторегрессионной модели на в.р. ΔRUB/USD





Эмпирическая PDF оптимальных порядков AR модели для в.р. ΔRUB/USD



Критические уровни значимости при попарной проверке гипотез об однородности

420 true H0 of total 528

0.26	0.20	0.00	0.36	0.37	0.28	0.20	0.50	0.36	0.12	0.40	0.46	0.33	0.33	0.10	0.19	0.31	0.28	0.15	0.12	0.10	0.13	0.16	0.35	0.32	0.39	0.42	0.42	0.27	0.00	0.16	0.00
	0.37	0.06	0.20	0.41	0.34	0.32	0.05	0.19	0.00	0.32	0.38	0.18	0.37	0.16	0.41	0.25	0.05	0.34	0.00	0.42	0.00	0.20	0.36	0.13	0.16	0.31	0.27	0.31	0.00	0.23	0.00
		0.07	0.10	0.38	0.47	0.41	0.18	0.08	0.00	0.40	0.16	0.49	0.35	0.00	0.50	0.06	0.00	0.45	0.08	0.23	0.00	0.00	0.39	0.10	0.16	0.23	0.22	0.41	0.00	0.39	0.07
			0.00	0.09	0.09	0.08	0.05	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.14	0.09	0.50	0.20
				0.22	0.23	0.23	0.45	0.10	0.14	0.26	0.42	0.24	0.21	0.41	0.09	0.47	0.40	0.08	0.29	0.30	0.22	0.31	0.44	0.38	0.45	0.34	0.21	0.16	0.00	0.08	0.00
					0.40	0.29	0.44	0.22	0.06	0.49	0.29	0.38	0.49	0.15	0.36	0.18	0.17	0.31	0.08	0.44	0.00	0.07	0.48	0.20	0.23	0.42	0.29	0.37	0.00	0.21	0.06
						0.38	0.23	0.08	0.00	0.39	0.17	0.34	0.33	0.09	0.48	0.11	0.21	0.42	0.00	0.40	0.07	0.00	0.34	0.15	0.14	0.35	0.25	0.47	0.00	0.10	0.08
							0.22	0.19	0.08	0.49	0.27	0.16	0.44	0.10	0.42	0.15	0.22	0.34	0.07	0.37	0.15	0.05	0.42	0.18	0.15	0.20	0.37	0.31	0.00	0.18	0.06
								0.39	0.09	0.26	0.49	0.35	0.31	0.25	0.32	0.30	0.26	0.14	0.12	0.15	0.13	0.13	0.49	0.09	0.35	0.38	0.39	0.32	0.00	0.13	0.00
									0.18	0.22	0.21	0.22	0.14	0.38	0.11	0.47	0.32	0.00	0.12	0.12	0.21	0.23	0.23	0.35	0.48	0.32	0.34	0.14	0.00	0.10	0.00
										0.08	0.05	0.00	0.00	0.08	0.00	0.13	0.09	0.00	0.20	0.00	0.20	0.23	0.05	0.49	0.23	0.30	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00
											0.18	0.44	0.49	0.15	0.35	0.22	0.20	0.37	0.14	0.40	0.09	0.14	0.50	0.24	0.23	0.46	0.37	0.32	0.00	0.30	0.00
												0.14	0.31	0.24	0.19	0.31	0.18	0.15	0.27	0.21	0.14	0.23	0.38	0.32	0.36	0.47	0.47	0.42	0.00	0.11	0.00
													0.42	0.00	0.09	0.20	0.18	0.18	0.07	0.18	0.00	0.00	0.46	0.16	0.26	0.25	0.19	0.27	0.00	0.19	0.00
														0.09	0.32	0.12	0.34	0.25	0.05	0.32	0.00	0.00	0.44	0.14	0.21	0.34	0.36	0.29	0.00	0.19	0.00
															0.00	0.23	0.30	0.00	0.42	0.00	0.18	0.34	0.14	0.40	0.37	0.11	0.33	0.00	0.00	0.09	0.00
																0.00	0.00	0.44	0.00	0.46	0.00	0.00	0.17	0.07	0.13	0.20	0.22	0.38	0.00	0.25	0.16
																	0.30	0.00	0.32	0.09	0.16	0.00	0.20	0.36	0.44	0.42	0.37	0.13	0.00	0.10	0.00
																		0.00	0.38	0.08	0.45	0.09	0.38	0.39	0.15	0.10	0.32	0.10	0.00	0.09	0.00
																			0.00	0.50	0.00	0.00	0.05	0.06	0.12	0.20	0.19	0.26	0.00	0.26	0.06
																				0.06	0.34	0.28	0.00	0.46	0.49	0.18	0.30	0.09	0.00	0.16	0.00
																					0.00	0.07	0.34	0.12	0.14	0.31	0.27	0.44	0.00	0.25	0.10
																						0.46	0.07	0.15	0.39	0.11	0.06	0.07	0.00	0.07	0.00
																							0.09	0.42	0.35	0.21	0.33	0.00	0.00	0.00	0.00
																								0.16	0.25	0.50	0.41	0.37	0.00	0.21	0.05
																									0.38	0.25	0.36	0.14	0.00	0.18	0.00
																										0.48	0.31	0.17	0.00	0.28	0.00
																											0.49	0.35	0.00	0.21	0.08
																												0.13	0.00	0.14	0.00
																													0.11	0.29	0.14
																														0.39	0.37
																															0.42

Определение эмпирической скорости

$$m(t)=\langle x\rangle_t=\int x\, f(x,t)\,dx$$

$$\frac{d\,m(t)}{d\,t}=\int x\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx=-\int x\frac{\partial u(x,t)\,f(x,t)}{\partial x}dx$$

$$\frac{d\,m(t)}{d\,t}=\int u(x,t)\,f(x,t)\,dx$$

$$\frac{d\,m(t)}{d\,t}=\int \dot{x}\, f(x,\dot{x},t)\,d\,\dot{x}$$

$$\int \dot{x}\, f(x,\dot{x},t)\,d\,\dot{x}=u(x,t)\,f(x,t)$$

Метод прогноза ВПФР на основании эмпирического уравнения Лиувилля (1)

- (1) $$\frac{\partial f(x,t-k)}{\partial t}=f(x,t-k+1)-f(x,t-k),\ k=1,2,\ldots$$
- (2) $$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)f(x,t)}{\partial x}=0$$
- (3) $$f(x,t)u(x,t)=\int \dot{x}\, f(x,\dot{x},t)\,d\dot{x}$$
- (4) $$\frac{\partial f(x,\dot{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial f(x,\dot{x},t)\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial f(x,\dot{x},t)\left\langle\frac{\delta \dot{x}}{\delta t}\right\rangle}{\partial \dot{x}}=0$$

Метод прогноза ВПФР на основании эмпирического уравнения Лиувилля (2)

- (5) $$w(x,\dot{x},t)f(x,\dot{x},t)=\int \ddot{x} f(x,\dot{x},\ddot{x},t)d\ddot{x}$$
- (6) $$\left(\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}\right)f-u^2\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial ef}{\partial x}+Wf$$
- (7) $$e(x,t)=\langle \dot{x}^2\rangle\ ;W(x,t)=\langle w(x,\dot{x},t)\rangle$$
- (8) $$f\frac{\partial e_k}{\partial t}=e_k\frac{\partial uf}{\partial x}-\frac{\partial g_{k+1}f}{\partial x}$$

Метод прогноза ВПФР на основании эмпирического уравнения Лиувилля (3)

- (9) $$\frac{\partial f(x,t-k)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)f(x,t)}{\partial x}=0$$

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial(u^2-e)f}{\partial x}\right)$$

$$f\frac{\partial e}{\partial t}=e\frac{\partial uf}{\partial x}-\frac{\partial g_3 f}{\partial x}$$

- (10) $$g_3(x,t)=e_3(x,t-1)$$