Исследование моделей приоритетного обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом при наличии повторных требований

Выполнила: Кореневская М. М., гр. 23641/3

Руководитель: к.ф.-м.н., доц., Заяц О. И.

Введение

Основные аналитические методы исследования телематических устройств основаны на теории массового обслуживания (ТМО).
Модели — системы массового обслуживания (СМО).
Ранее использовались простейшие однопотоковые модели.
Усложнения:

- Многопотоковость
- Приоритеты
- Выталкивающий механизм
- Повторные требования

Классификация приоритетных СМО по Г. П. Башарину[1]

Общепринятое обозначение марковских СМО:
$\overrightarrow{M_r}/\overrightarrow{M_r}/m/k/l/f_i^j$.

- r — количество входящих потоков
- M — символ простейшего потока
- m — число каналов обслуживания
- k — суммарная емкость системы
- l — число источников нагрузки
- f_i^j — символ приоритета
- приоритет: $i = 0$ — отсутствует, $i = 1$ — относительный, $i = 2$ — абсолютный
- выталкивающий механизм: $j = 0$ — отсутствует, $j = 1$ — вероятностный, $j = 2$ — детерминированный

В работе рассмотрены системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$.

[1] Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А. Массовое обслуживание в телефонии. - М.: Наука, 1968.

Приоритетные СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$

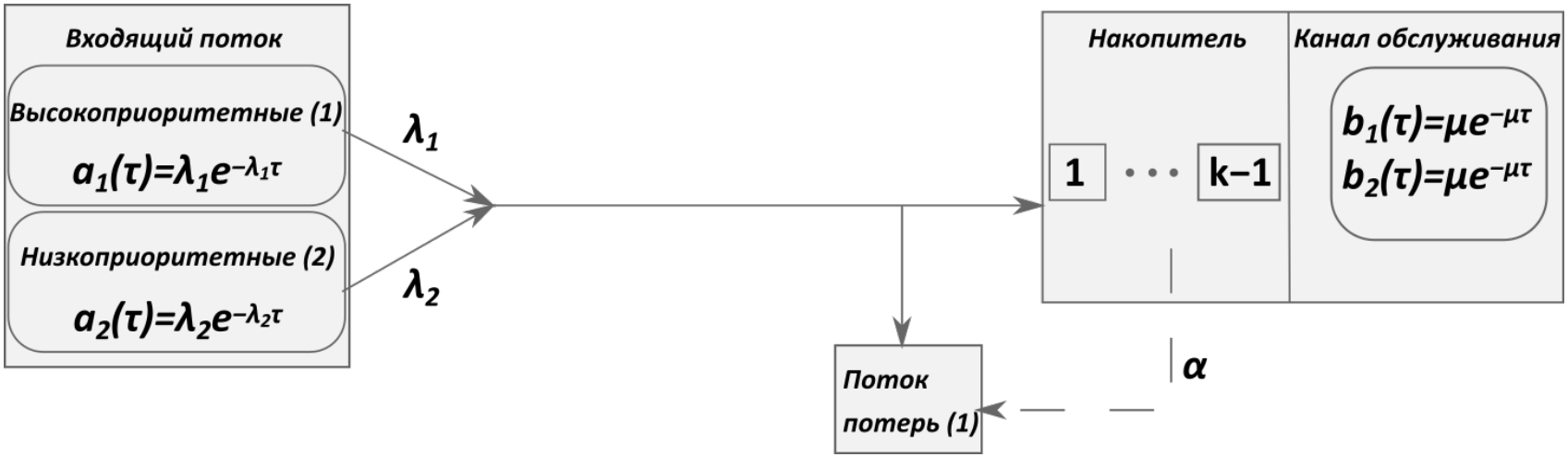

Рис. 1: Схема приоритетной двухпотоковой СМО с вероятностным выталкивающим механизмом[2]: λ_i — интенсивность i-го потока, μ — интенсивность обслуживания, α — вероятность выталкивания

Цели работы:

- Обобщить СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ на случай наличия повторных требований
- Исследовать полученные системы
- Изучить модификации СМО с повторными требованиями и одним входящим первичным потоком

[2] Avrachenkov K. E., Vilchevsky N. O., Shevlyakov G. L. Priority queueing with finite buffer size and randomized push-out mechanism // Performance evaluation. - 2005. - vol. 61. - no. 1. - p. 1–16.

Двухпотоковая СМО с повторными требованиями

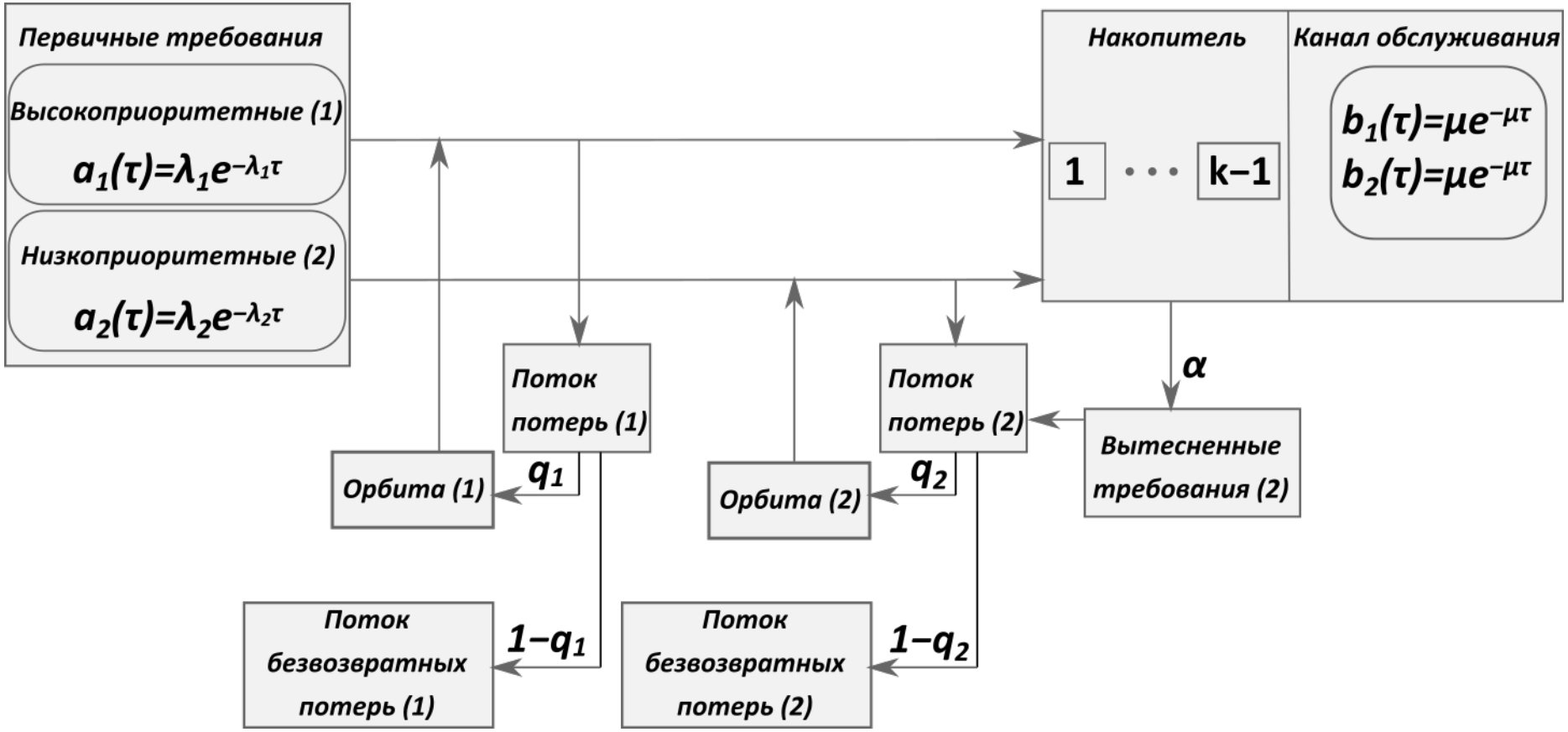

Рис. 2: Схема СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ с повторными требованиями

Учет повторных требований: СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$

Поток 1: высокоприоритетные требования,
Поток 2: низкоприоритетные требования.
Интенсивности входящих потоков:

$$\lambda_i = \lambda_{0,i} + \lambda_{rep,i} = \frac{\lambda_{0,i}}{1 - P_{loss}^{(i)} q_i}, \quad (i = \overline{1,2}) \tag{1}$$

$\lambda_{0,i}$ — интенсивность поступления первичных требований i-го типа,
$\lambda_{rep,i}$ — интенсивность поступления повторных требований i-го типа[3],
q_i — вероятность повторного обращения требований i-го типа,

$$P_{loss}^{(i)} = \phi_i(\rho_1, \rho_2, k, \alpha) \tag{2}$$

— вероятность потери требований i-го типа[4],

---

[3] Степанов С. Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами. - М.: Наука, 1983.

[4] Ilyashenko A., Zayats O., Muliukha V., Laboshin L. Further investigations of the priority queueing system with preemptive priority and randomized push-out mechanism // Lecture notes in computer science. - 2014. - vol. 8636. - p. 433–443.

Учет повторных требований: СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ (продолжение)

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu} \tag{3}$$

— коэффициент загрузки системы требованиями i-го типа.

$$\phi_1(\rho_1, \rho_2, k, \alpha) = p_0 + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k-1} p_i, \tag{4}$$

- Абсолютный приоритет:

$$\phi_2(\rho_1, \rho_2, k, \alpha) = \sum_{i=0}^{k} p_i + \frac{\rho_1}{\rho_2}\alpha\sum_{i=1}^{k-1} p_i + \frac{\rho_1}{\rho_2} p_k, \tag{5}$$

- Относительный приоритет:

$$\phi_2(\rho_1, \rho_2, k, \alpha) = \sum_{i=0}^{k-1} p_i + \frac{\rho_1}{\rho_2}\alpha\sum_{i=1}^{k-1} p_i, \tag{6}$$

СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$ с повторными требованиями

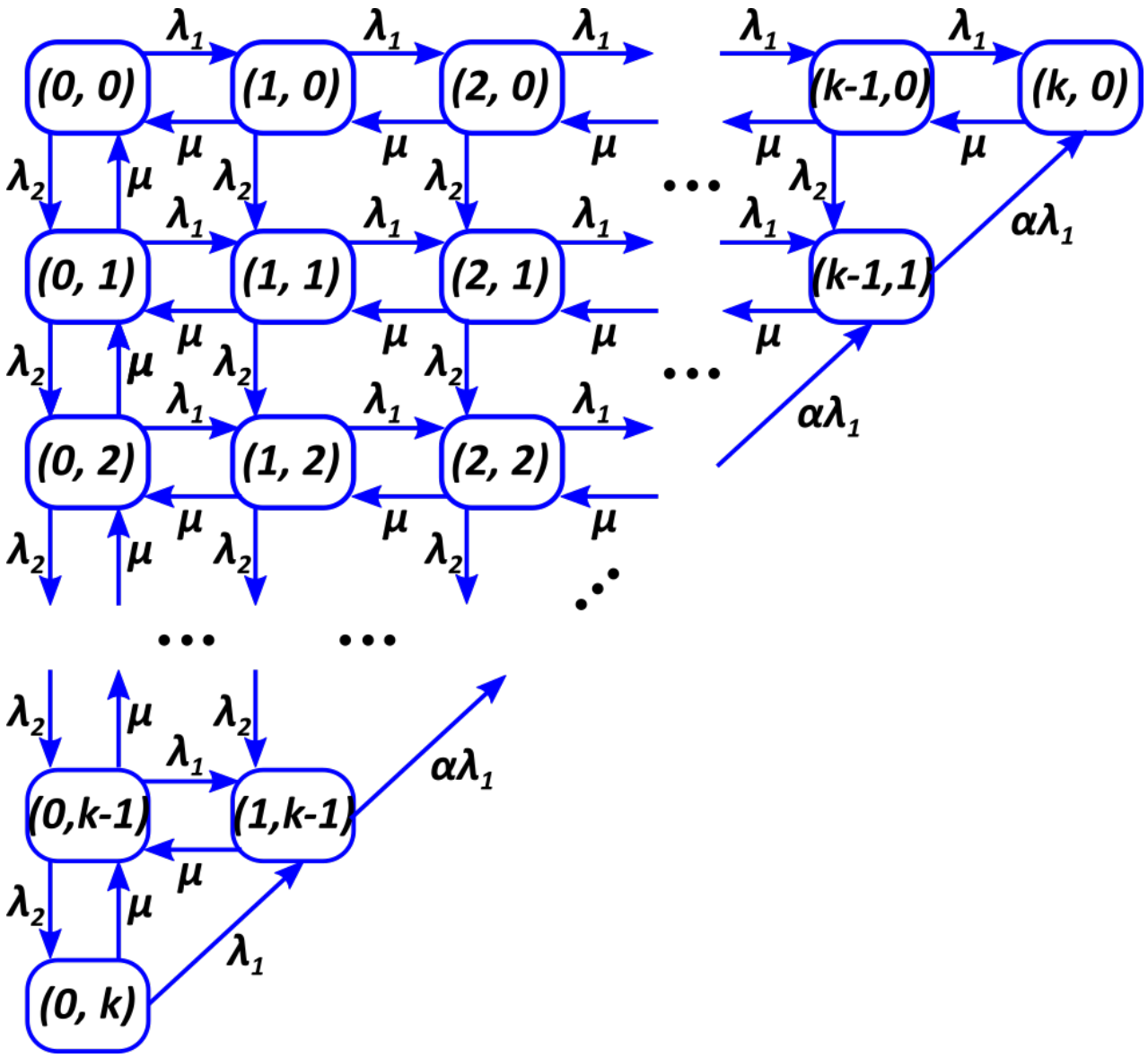

Рис. 3: Размеченный граф состояний для двухпотоковой СМО с абсолютным приоритетом м повторными требованиями

Система уравнений равновесия (СУР)

Система стационарных уравнений Колмогорова[5]:

$$\begin{aligned}
&-\left[\lambda_1(1-\delta_{i+j,k})+\alpha\lambda_1(1-\delta_{i,k})\delta_{i+j,k}+(1-\alpha)\lambda_1\delta_{i,0}\delta_{i+j,k}+\right.\\
&\left.+\lambda_2(1-\delta_{i+j,k})+\mu(1-\delta_{i,0}\delta_{j,0})\right]P_{i,j}+\mu P_{i+1,j}+\mu\delta_{i,0}P_{i,j+1}+\\
&+\lambda_2 P_{i,j-1}+\lambda_1 P_{i-1,j}+\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k}P_{i-1,j+1}+\\
&+(1-\alpha)\lambda_1\delta_{i+j,k}\delta_{i,1}P_{i-1,j+1}=0,\quad (i=\overline{0,k}, j=\overline{0,k-i}),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$P_{i,j}=P\{N_1=i, N_2=j\},\quad (i=\overline{0,k}; j=\overline{0,k-i}), \tag{8}$$

N_s — число требований s-го типа в системе,
$\delta_{i,j}$ — дельта-символ Кронекера.
Условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}=1. \tag{9}$$

[5]Заяц О. И., Заборовский В. С., Мулюха В. А., Вербенко А. С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 1 // Программная инженерия. - 2012. - № 2. - с. 22–27.

Метод производящих функций

Производящая функция:

$$G(u,v) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} P_{i,j} u^i v^j = \frac{Q_{k+2}(u,v)}{R_2(u,v)}, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{k+2}(u,v) &= (u-v)G(0,v) + u(u-1)G(0,0) + \\ &+ [\alpha\rho_1(u-v) + \rho_1(1-u)v + \rho_2(1-v)v]\, u \sum_{i=0}^{k} P_{i,k-i} u^i v^{k-i} + \\ &+ (1-\alpha)\rho_1 P_{0,k} v^k u(u-v) + \alpha\rho_1 u^{k+1}(v-u) P_{k,0}, \\ R_2(u,v) &= [\lambda_1 u(1-u) + \lambda_2 u(1-v) + \mu(u-1)]\, v. \end{aligned} \tag{11}$$

Корни R_2:

$$u_{1,2} = \frac{[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1] \pm \sqrt{[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1]^2 - 4\rho_1}}{2\rho_1}. \tag{12}$$

$G(u,v)$ — полином!

Условия аналитичности:

$$Q_{k+2}(u_1, v) = 0, \quad Q_{k+2}(u_2, v) = 0. \tag{13}$$

“Укороченная” система уравнений равновесия

Опорные вероятности[6]:

$$p_i = P_{k-i,i}, \quad (i = \overline{0,k}). \tag{14}$$

Остальные вероятности $P_{i,j}$ выражаются через опорные. Подстановка в (10) $u = v$ позволяет получить систему уравнений для определения опорных вероятностей. СУР порядка $(k+1)(k+2)/2$ сводится к системе порядка $k+1$ с квазитреугольной матрицей.

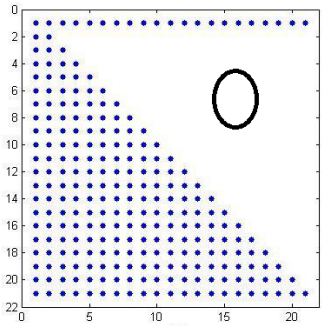

Рис. 4: Профиль матрицы укороченной системы для $k = 21$

[6]Ильяшенко А. С. Модели и метод исследования приоритетных систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом. Кандидатская диссертация. - СПб: СПбГПУ, 2014.

Модифицированная СМО с повторными требованиями

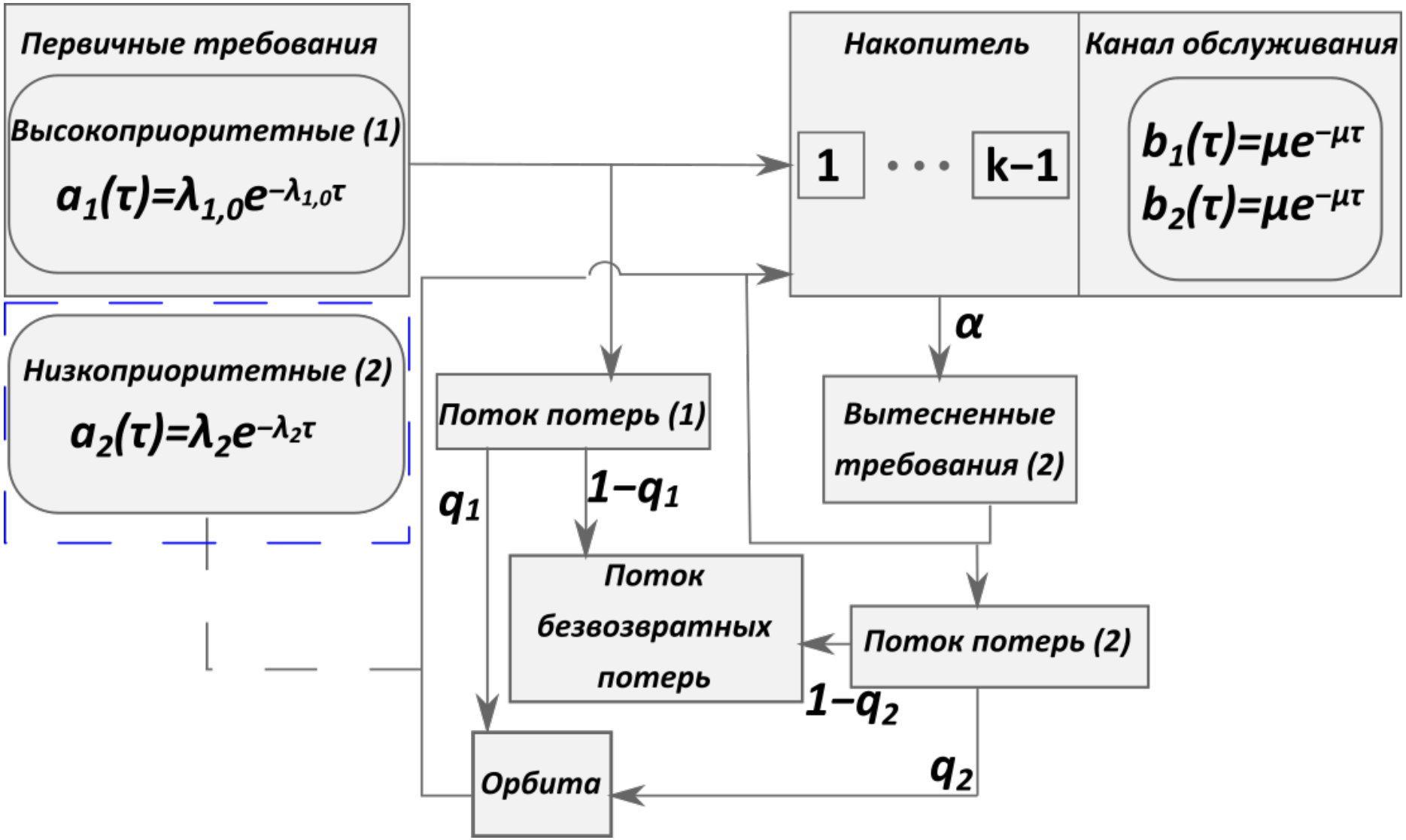

Рис. 5: Схема модифицированной системы класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ с повторными требованиями

Модифицированная система класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ с повторными требованиями

Интенсивности в модифицированной системе:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \\ \lambda_2 = \lambda_{1,rep} + \lambda_{2,rep} = \frac{\lambda_{1,0} q_1 P_{loss}^{(1)}}{1 - q_1 P_{loss}^{(1)}} + \frac{\lambda_2 q_2 P_{loss}^{(2)}}{1 - q_2 P_{loss}^{(2)}}. \end{cases} \tag{15}$$

Система уравнений для определения коэффициентов загрузки:

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_{1,0}, \\ \rho_2 = \frac{\rho_{1,0} q_1 \phi_1(\rho_1, \rho_2, k, \alpha)}{1 - q_1 \phi_1(\rho_1, \rho_2, k, \alpha)} \cdot \frac{1 - q_2 \phi_2(\rho_1, \rho_2, k, \alpha)}{1 - 2 q_2 \phi_2(\rho_1, \rho_2, k, \alpha)}. \end{cases} \tag{16}$$

$P_{loss}^{(i)}, \phi_i$ — как в формулах (2), (6).

$\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$, слабая загрузка: зависимости P_{loss} от α

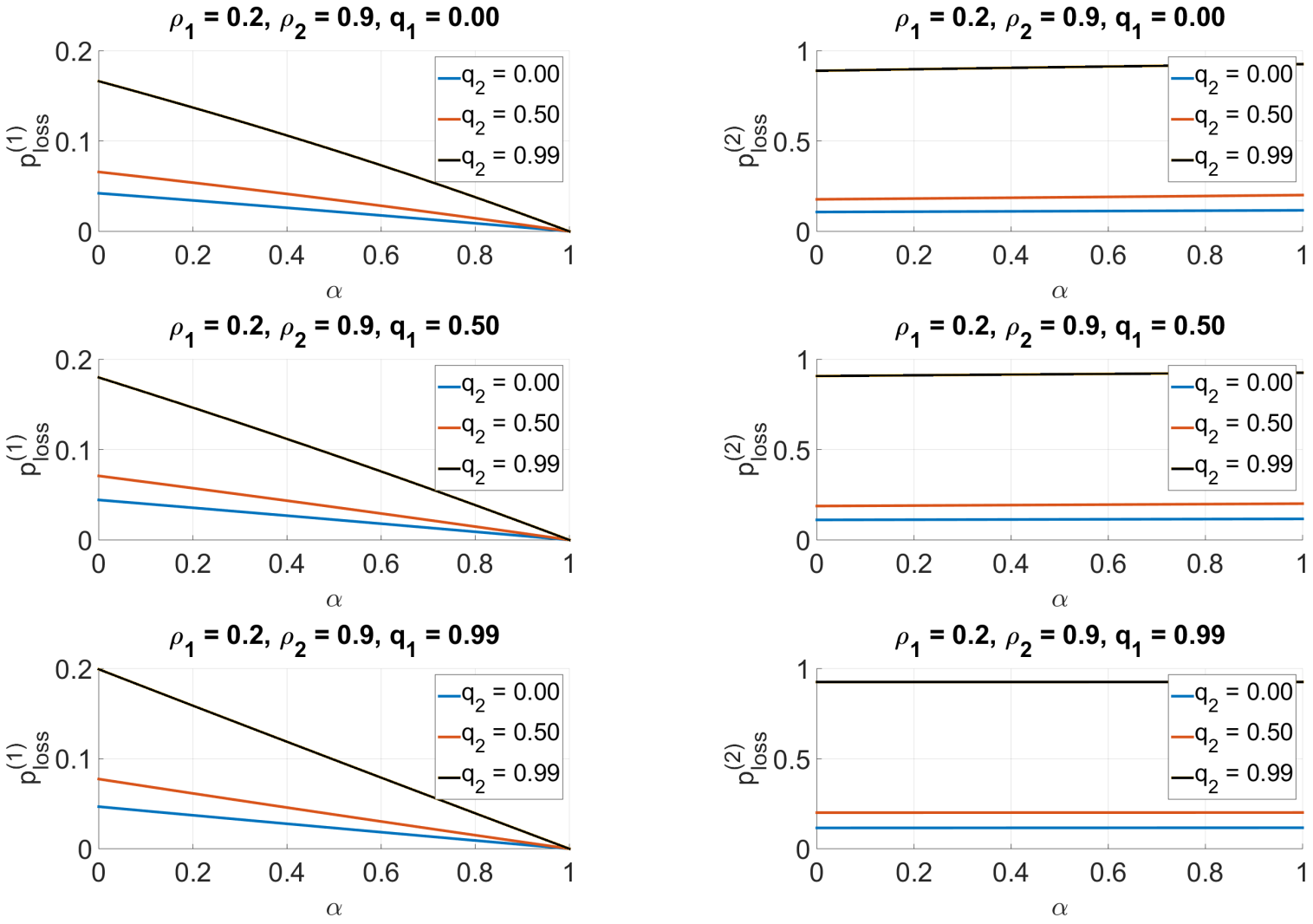

Рис. 6: $k = 31, \rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$: левый столбец — высокоприоритетные требования, правый — низкоприоритетные; сверху-вниз: $q_1 = 0, 0.5, 0.99$

$\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$, сильная загрузка: зависимости P_{loss} от α

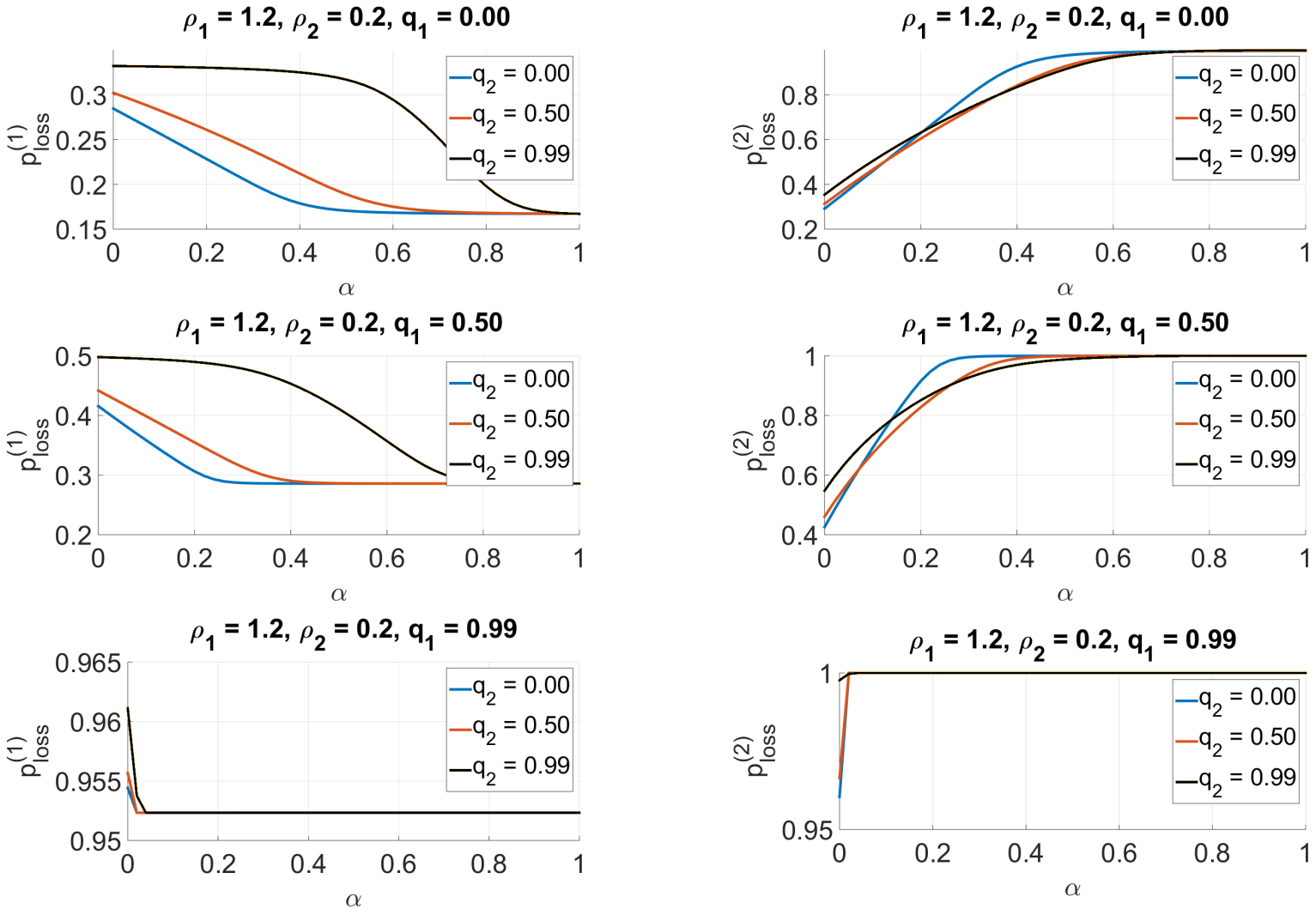

Рис. 7: $k = 31, \rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$: левый столбец — высокоприоритетные требования, правый — низкоприоритетные; сверху-вниз: $q_1 = 0, 0.5, 0.99$

Области запирания системы

Условие запирания:

$$P_{loss}^{(2)} = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{17}$$

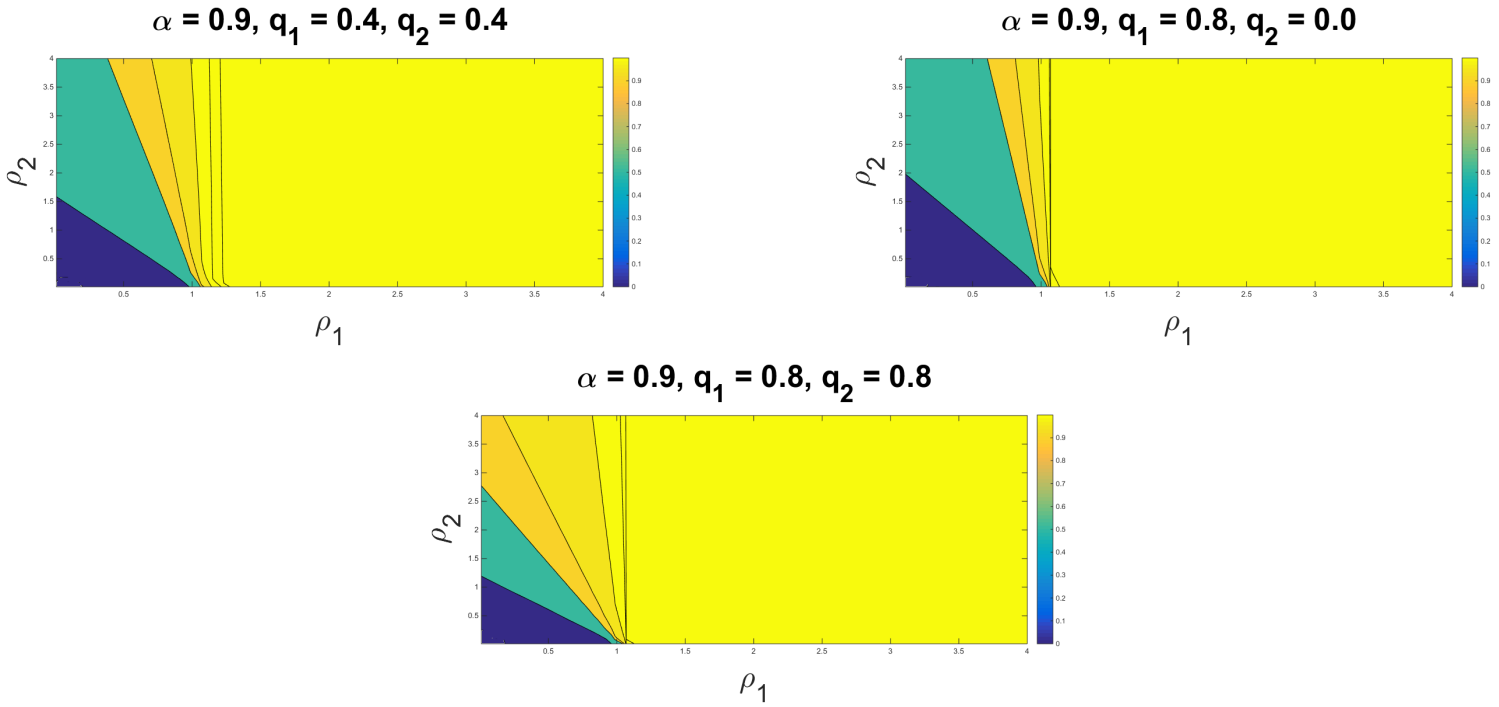

Рис. 8: $k = 31, \alpha = 0.9$: области запирания системы, $q_1 = 0$, $q_2 = 0, 0.4, 0.8$

Области близости закона потерь к линейному

$$\delta P_{loss}^{(i)} = \left\| P_{loss}^{(i)}(\alpha) - \left[(1-\alpha) P_{loss}^{(i)}(0) + \alpha P_{loss}^{(i)}(1) \right] \right\|_C \Big/ \left\| P_{loss}^{(i)}(\alpha) \right\|_C \qquad (18)$$

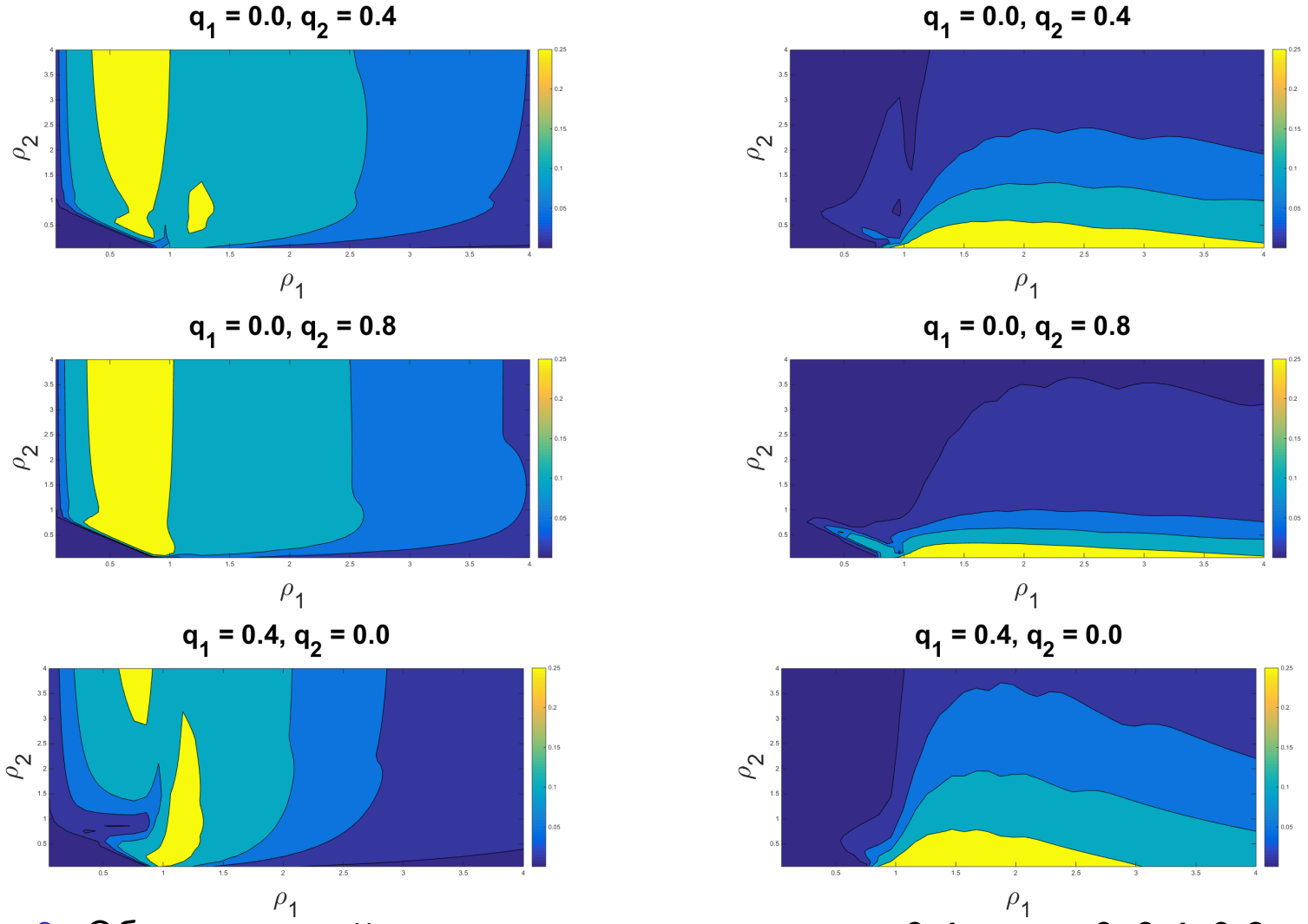

Рис. 9: Области линейности закона потерь: $q_1 = 0.4$, $q_2 = 0, 0.4, 0.8$, слева — высокоприоритетные требования, справа — низкоприоритетные

Модифицированная система: эффект “взрыва”

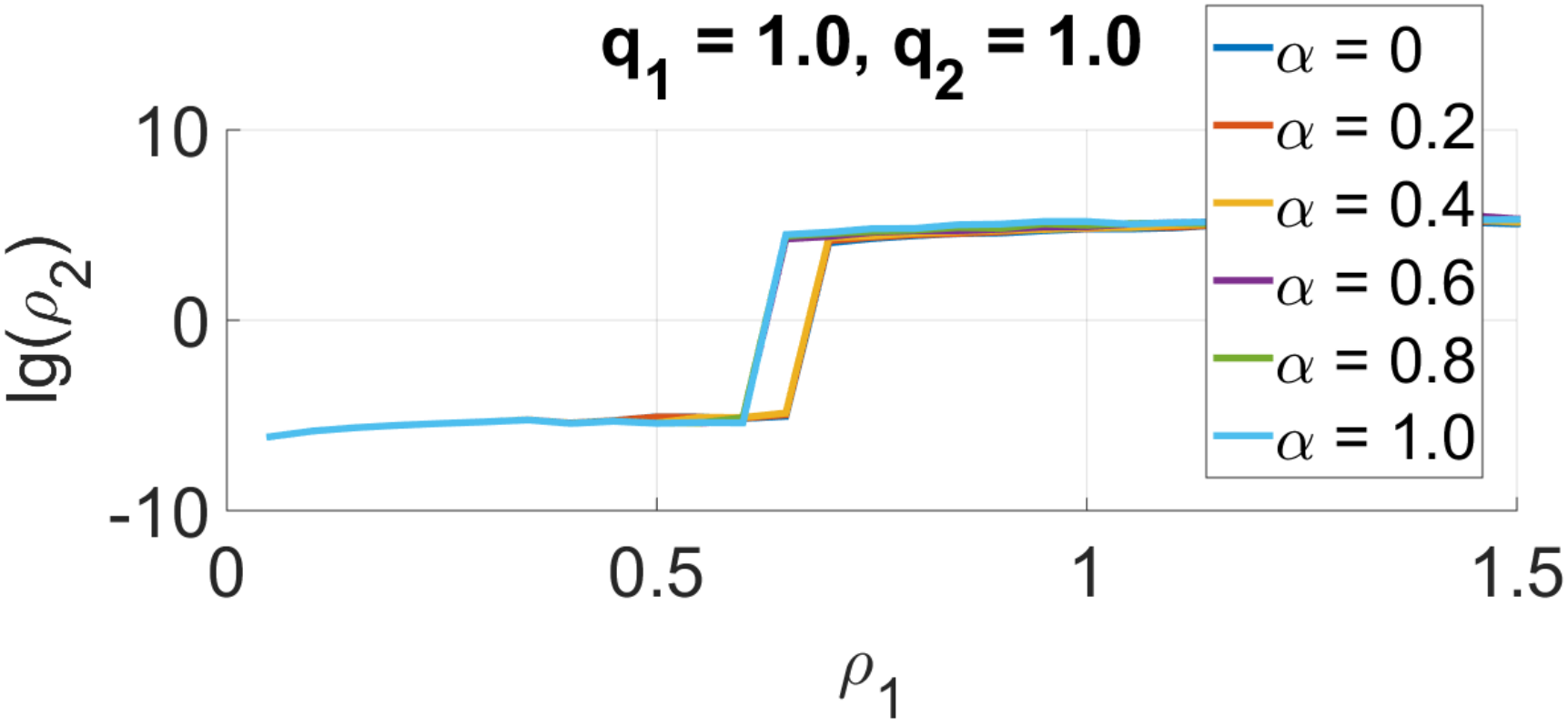

Рис. 10: Зависимость логарифма интенсивности вторичного потока от интенсивности первичного

Основные результаты работы

- Дано обобщение методов анализа приоритетных СМО с вероятностным выталкивающим механизмом на случай наличия повторных обращений.
- Изучен модифицированный вариант таких систем.
- Получены зависимости вероятностей потерь от параметров модели.
- Построены области запирания.
- Построены области действия линейного закона потерь.
- Обнаружен эффект “взрыва” для потока низкоприоритетных требований в однопотоковой модели.

Спасибо за внимание!

Эффект “взрыва”: подробнее

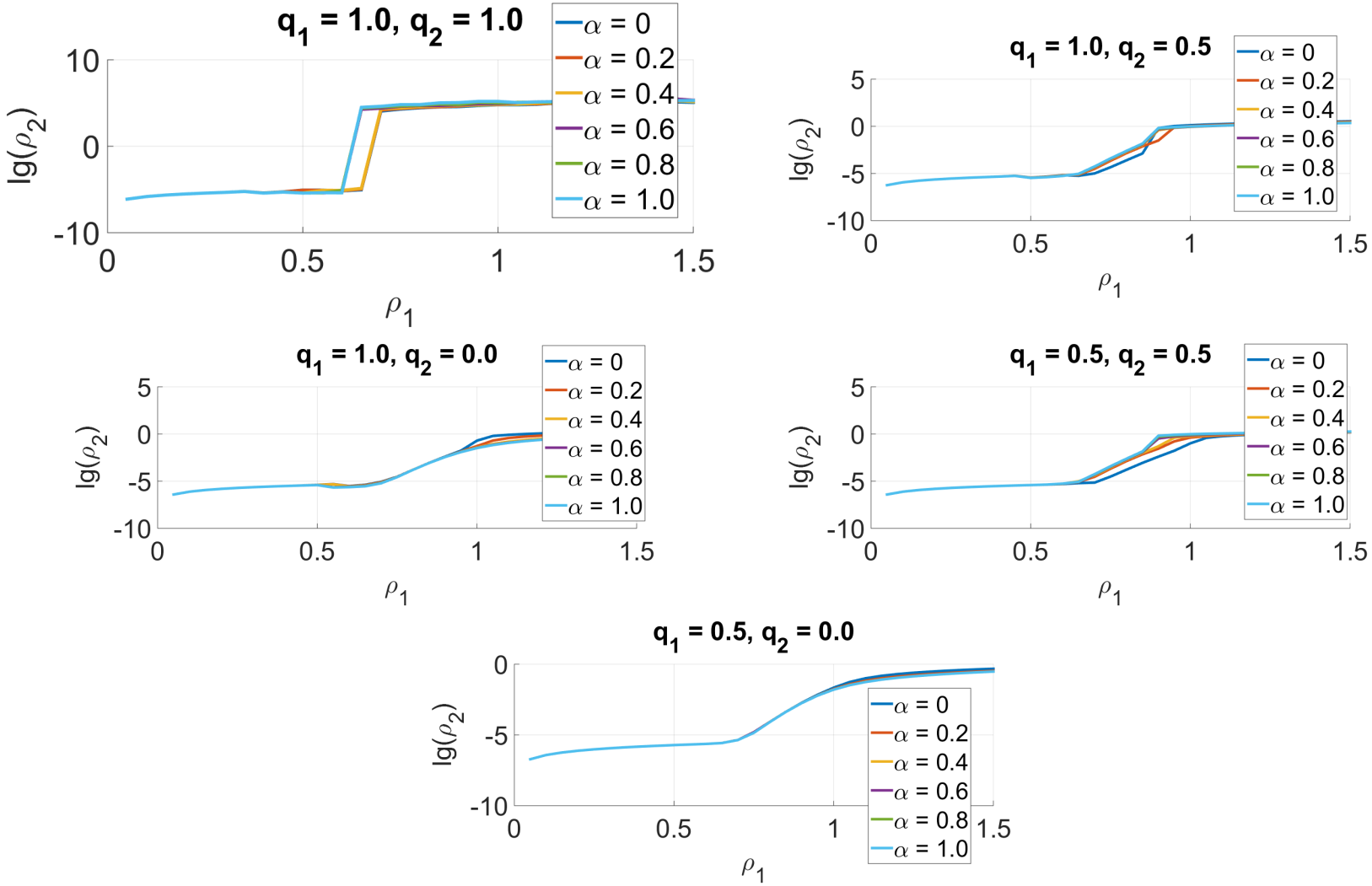

Рис. 11: Зависимость логарифма интенсивности вторичного потока от интенсивности первичного

Обозначение приоритетных СМО

$\overrightarrow{A_r}/\overrightarrow{B_r}/m/\overrightarrow{k}/\overrightarrow{l}/f_i^j$.

- r — количество входящих потоков
- A и B (законы распределения): M (показательный), E_r (эрланговский порядка r), H_r (гиперэкспоненциальный порядка r), D (детерминированный), G (общего вида).
- m — число каналов обслуживания
- k — суммарная емкость системы, $\overrightarrow{k}$ — раздельные очереди
- l — число источников нагрузки, $\overrightarrow{l}$ — раздельные источники нагрузки
- f_i^j — символ приоритета
- приоритет: $i = 0$ — отсутствует, $i = 1$ — относительный, $i = 2$ — абсолютный
- выталкивающий механизм: $j = 0$ — отсутствует, $j = 1$ — вероятностный, $j = 2$ — детерминированный

Укороченная СУР

$$\begin{cases} r_n = p_0 \frac{1}{\rho_1} \zeta_n - \alpha \phi_n p_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} p_j \xi_{n,j} + p_k(\alpha - 1)\delta_{n,k-1}, \\ (n = \overline{0, k-1}), \\ r_k = \sum_{i=0}^{k} p_{k-i,i}, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\zeta_n = \sum_{j=0}^{n} \rho_1^{(1-k+n-j)/2} \beta^j \left(C_{k-n-1}^{j+1} - \rho_1^{1/2} C_{k-n-2}^{j+1} \right), \tag{20}$$

$$\phi_n = \rho_1^{(1-k+n)/2} C_{k-n-1}^{1}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \xi_n = \sum_{l=j}^{n} \rho_1^{(n-k-l+j)/2} \left(\frac{1}{\rho_1^{1/2}} C_{k-n-1}^{l-j+1} - C_{k-n-2}^{l-j+1} \right) \beta^{l-j} - \\ - \alpha \rho_1^{(j-k)/2} \beta^{n+1-j} C_{k-n-1}^{n-j+2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Укороченная СУР (продолжение)

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} P_{i,n-i}, \tag{23}$$

$$\beta = -\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}}, \quad t_0 = \frac{1+\rho}{2\sqrt{\rho_1}}, \tag{24}$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \tag{25}$$

$C_n^\nu = C_n^\nu(t_0)$ — полином Гегенбауэра[7] порядка n с индексом ν.

[7] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. - М.:Наука, 1974.

Области запирания системы: относительный приоритет

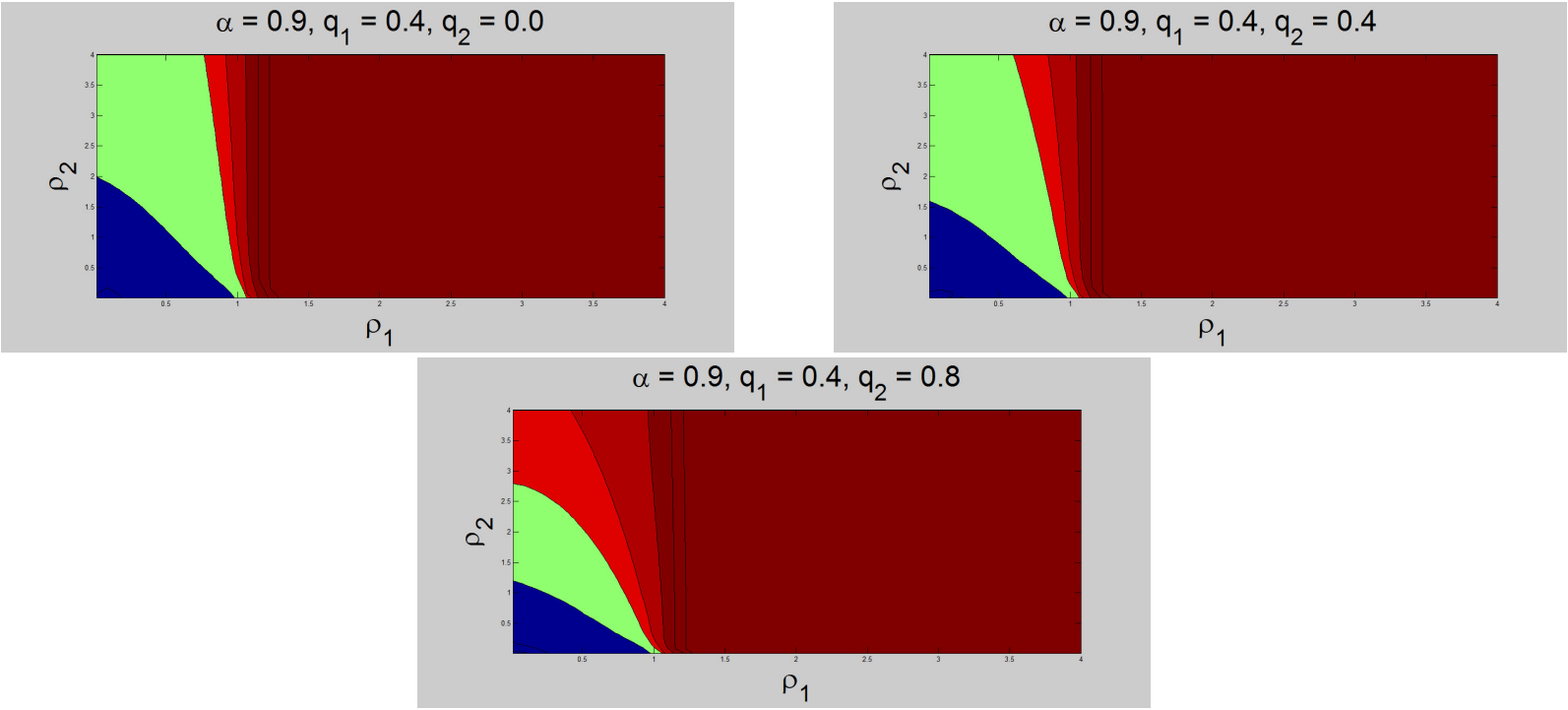

Рис. 12: $k = 31, \alpha = 0.9$: области запирания системы, $q_1 = 0$, $q_2 = 0, 0.4, 0.8$

Области близости закона потерь к линейному: низкоприоритетные требования

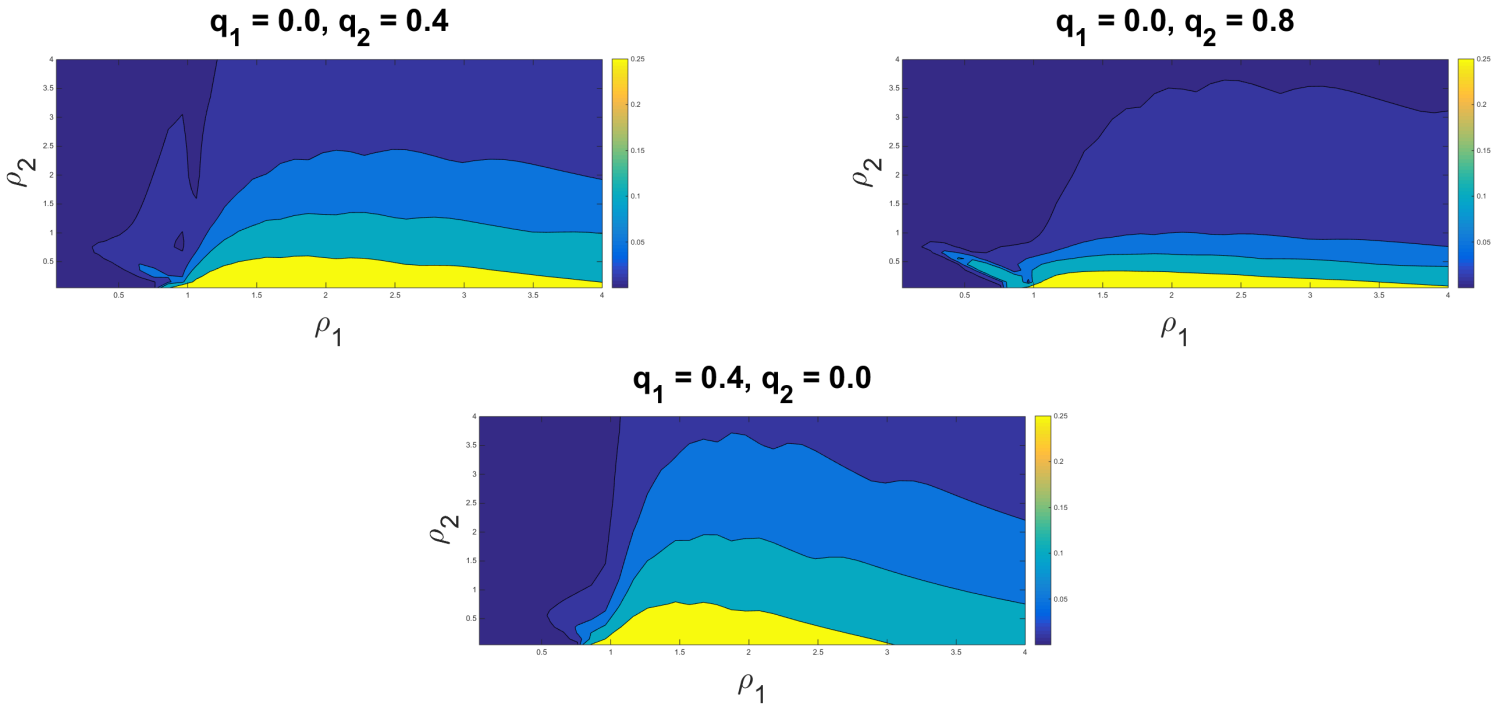

Рис. 13: Области линейности закона потерь: $q_1 = 0.4$, $q_2 = 0, 0.4, 0.8$, требования 2 типа

Области близости закона потерь к линейному: относительный приоритет

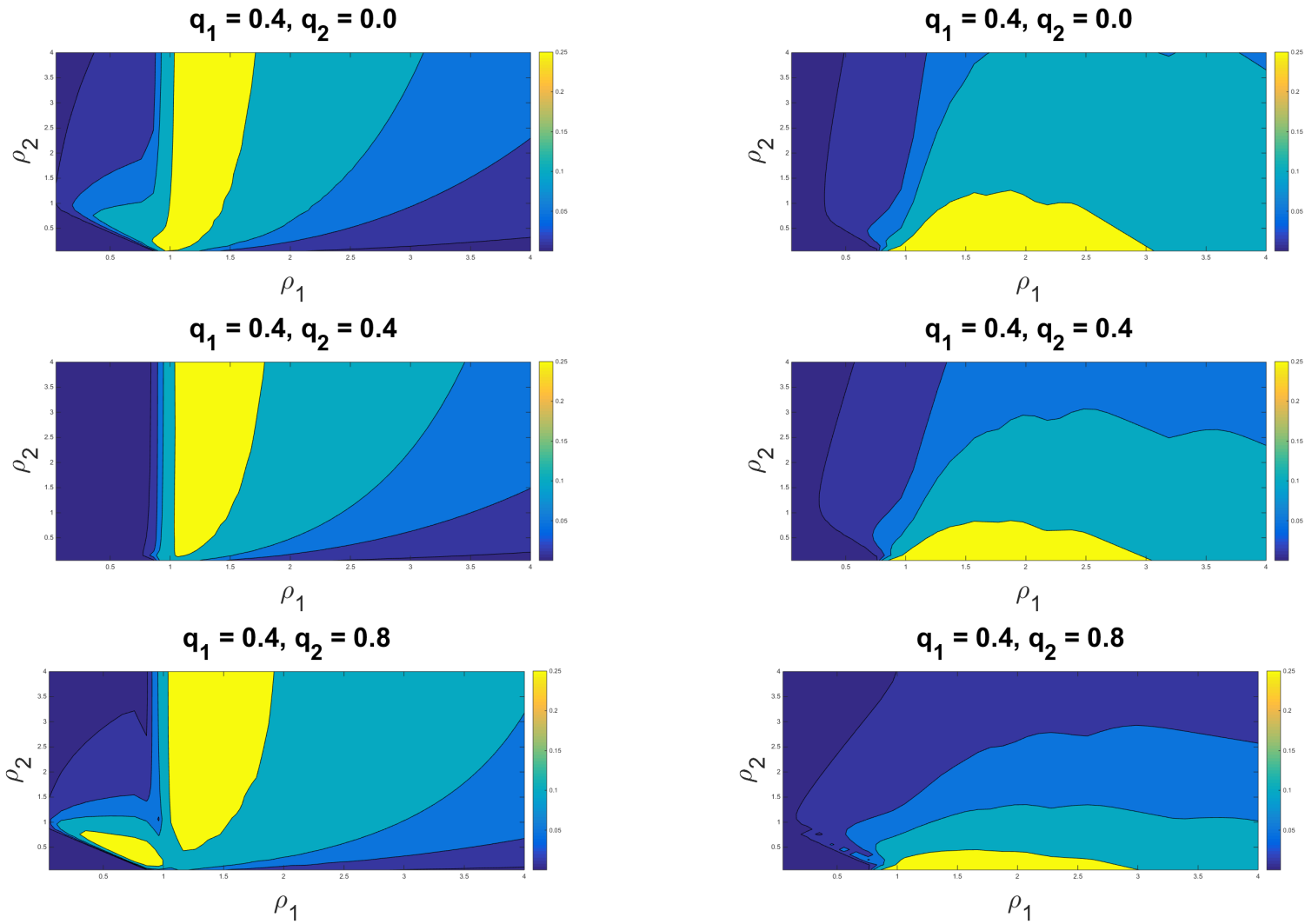

Рис. 14: Области линейности закона потерь: $q_1 = 0.4$, $q_2 = 0, 0.4, 0.8$, слева — требования 1 типа, справа — 2 типа

Модифицированная система: области запирания

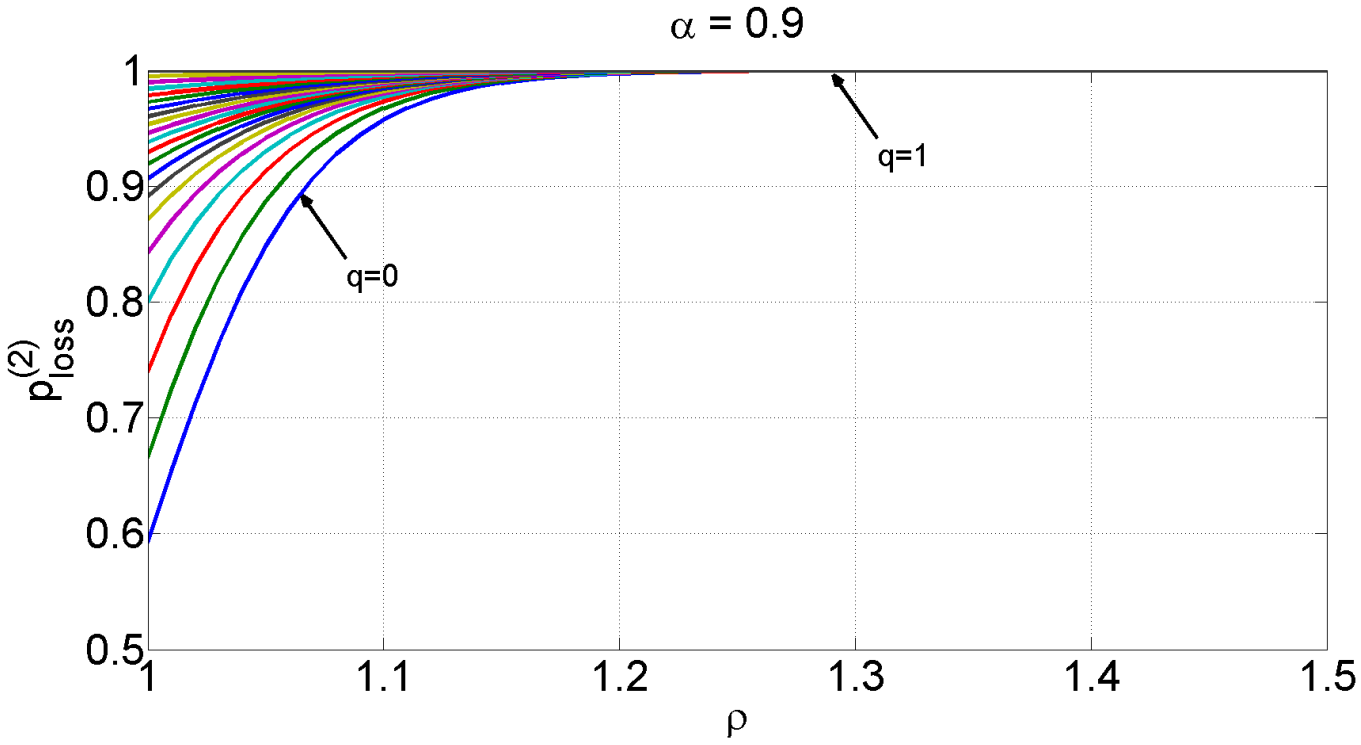

Рис. 15: Исследование эффекта запирания модифицированной системы: $k = 31, \alpha = 0.9$

Модифицированная система, абсолютный приоритет: области близости закона потерь к линейному

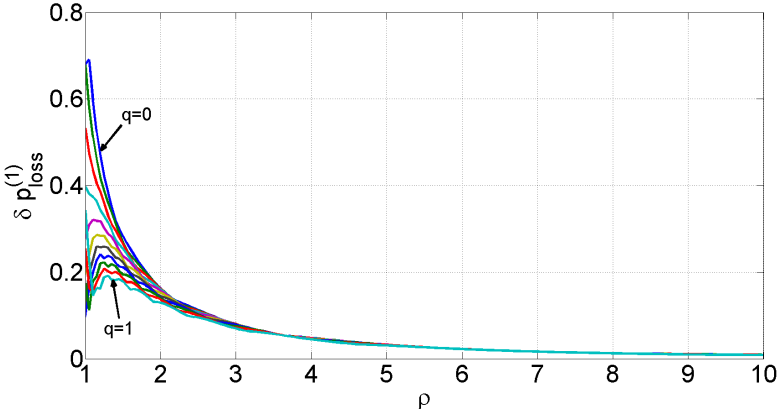

Рис. 16: Области линейности закона потерь: высокоприоритетные требования

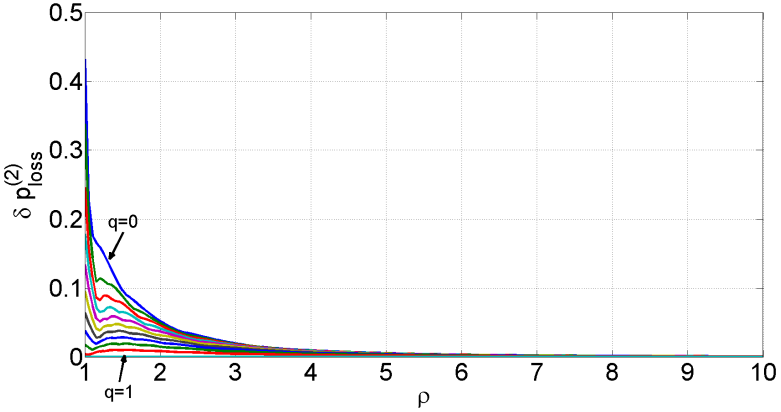

Рис. 17: Области линейности закона потерь: низкоприоритетные требования

Модифицированная система, относительный приоритет: области близости закона потерь к линейному

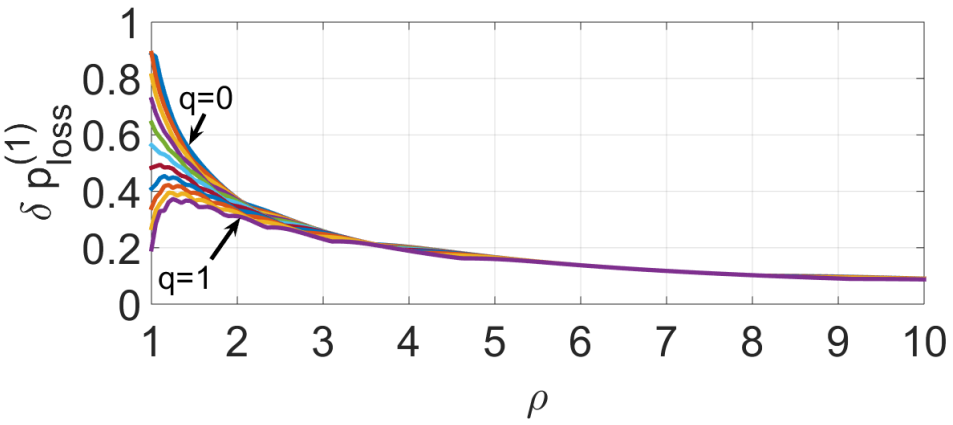

Рис. 18: Области линейности закона потерь: высокоприоритетные требования

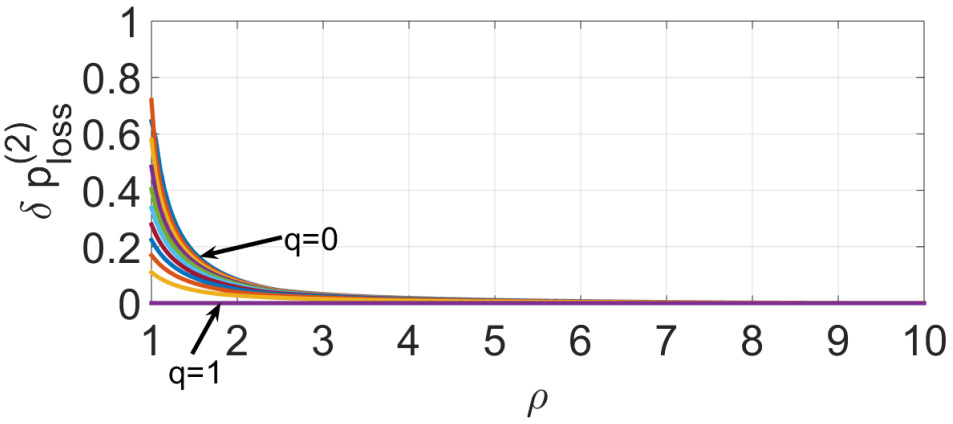

Рис. 19: Области линейности закона потерь: низкоприоритетные требования

Влияние емкости системы k на $P_{loss}^{(1,2)}$: слабая загрузка

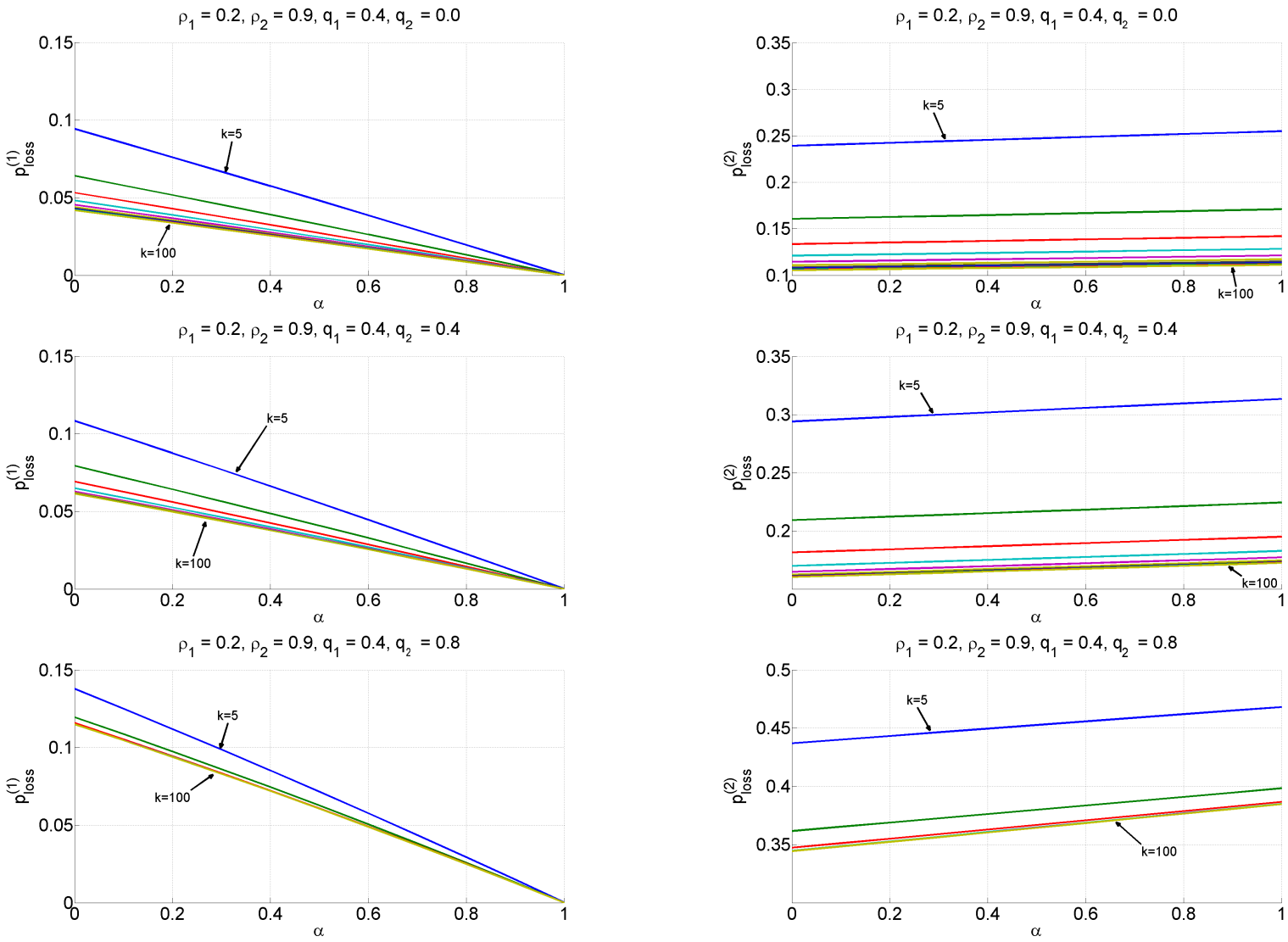

Рис. 20: $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$: левый столбец — высокоприоритетные требования, правый — низкоприоритетные; $q_1 = 0.4$, сверху-вниз: $q_2 = 0, 0.4, 0.8$

Влияние емкости системы k на $P_{loss}^{(1,2)}$: сильная загрузка

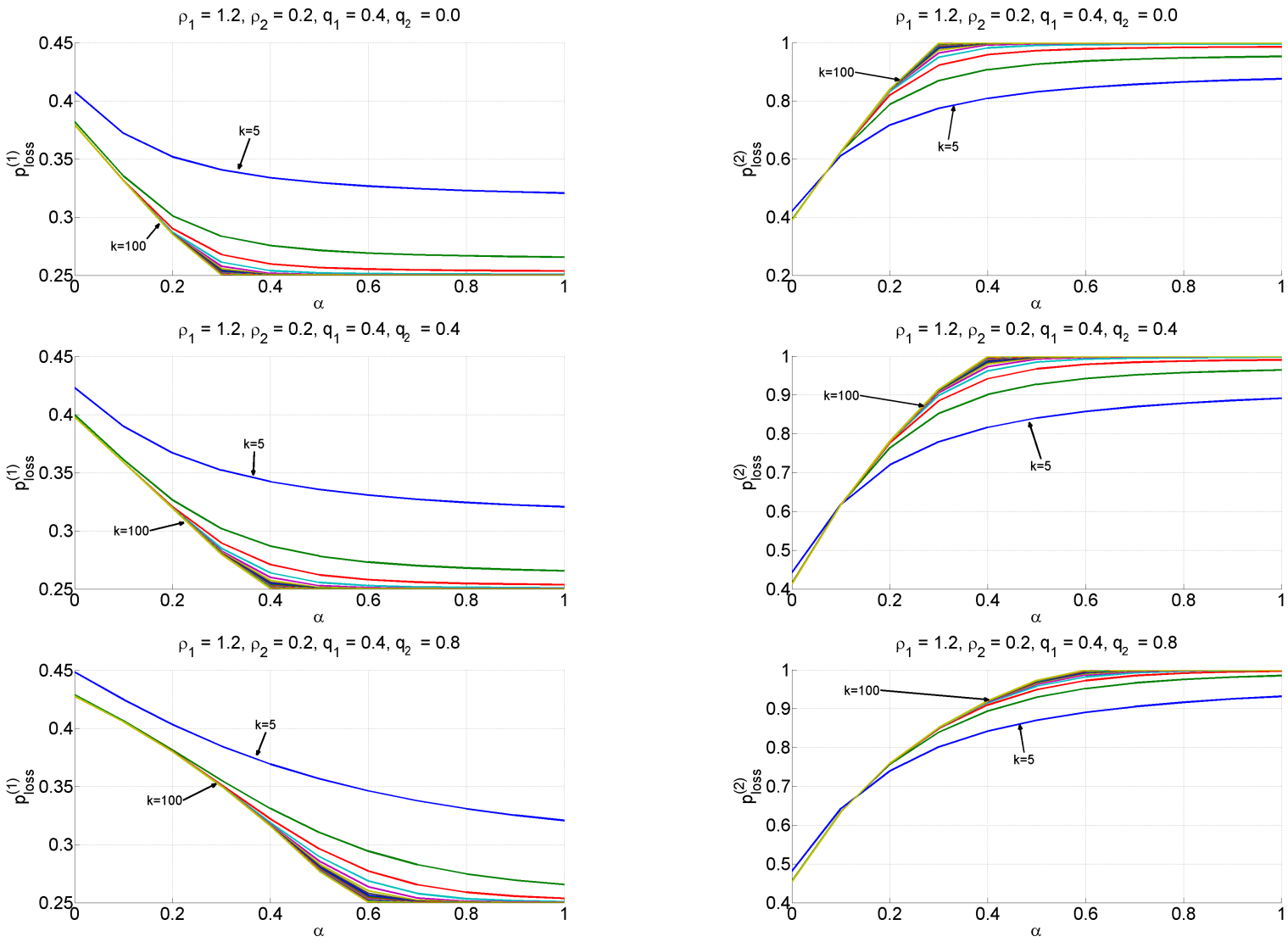

Рис. 21: $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$: левый столбец — высокоприоритетные требования, правый — низкоприоритетные; $q_1 = 0.4$, сверху-вниз: $q_2 = 0, 0.4, 0.8$

Модифицированная система. Зависимости вероятностей потерь от α при разных q

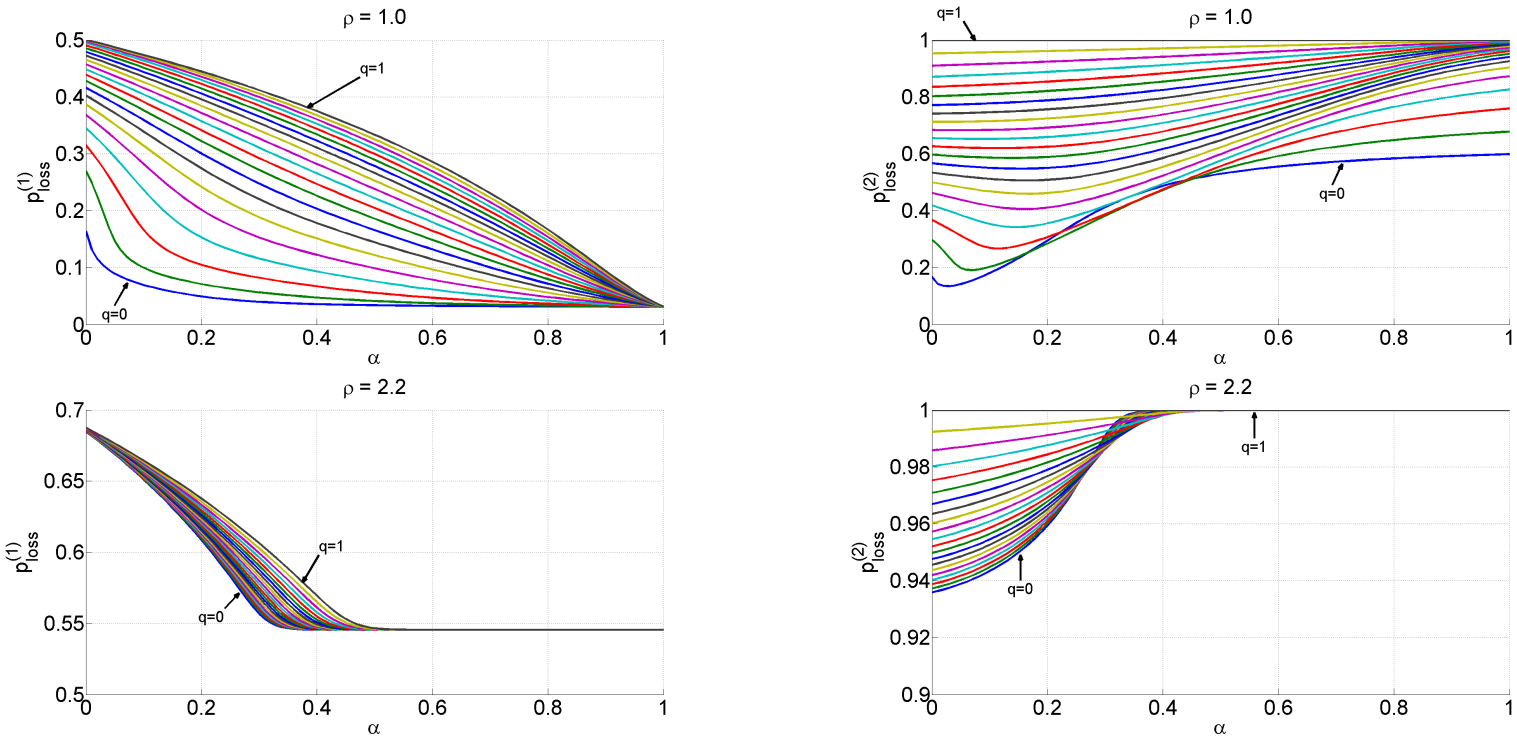

Рис. 22: Влияние вероятности повторного обращения на зависимость вероятностей потерь от параметра выталкивания: левый столбец — высокоприоритетные требования, правый — низкоприоритетные; сверху-вниз: $\rho_1 = 1$, $\rho_1 = 2.2$

Исследование интенсивности потока повторных требований

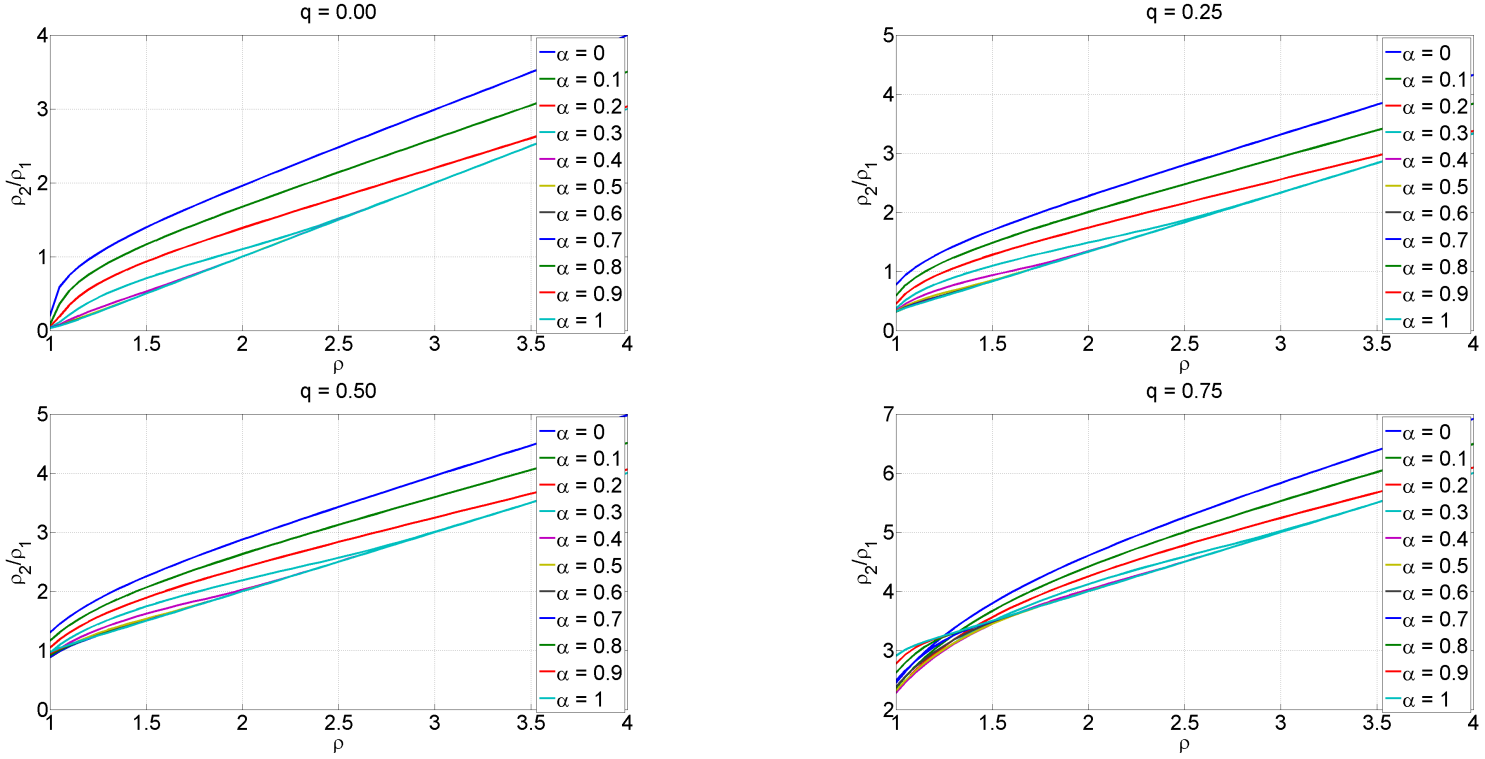

Рис. 23: Зависимости отношения интенсивностей повторного и первичного потоков ρ_2/ρ_1 от ρ_1 при различных α и q: слева-направо и сверху-вниз: $q = 0, 0.25, 0.5, 0.75$