САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт прикладной математики и механики

Кафедра "Прикладная математика"

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

Решение задач двумерной гидродинамики вихревыми методами

Выполнил студент группы 23641/1 А.А.Елисеев
Научный руководитель, д.т.н, проф. Б.С.Григорьев

07 июня 2018 г.

Актуальность темы

- В гидроаэродинамике важное место занимают задачи внешнего обтекания.
- Для тел большого удлинения наблюдаемое течение можно считать плоскопараллельным (двумерным).

Цели и задачи работы:

- Исследовать применимость вихревых методов в двумерных задачах внешнего обтекания.

  Для этого:

  - Рассмотреть обтекание тела идеальной/вязкой жидкостью, а также неизотермические течения.
  - Выбрать подходящие вихревые методы для решения поставленных задач и реализовать их.
  - Решить тестовую задачу для верификации алгоритмов.

Работа выполнена в рамках договора с компанией Robert Bosch.

Постановка задачи

- Поток считается *несжимаемым* (плотность ρ постоянна).
- Течение несжимаемой вязкой жидкости описывается *уравнениями Навье-Стокса*.

  Уравнение неразрывности:

  $$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

  Уравнение баланса импульса:

  $$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} \tag{2}$$

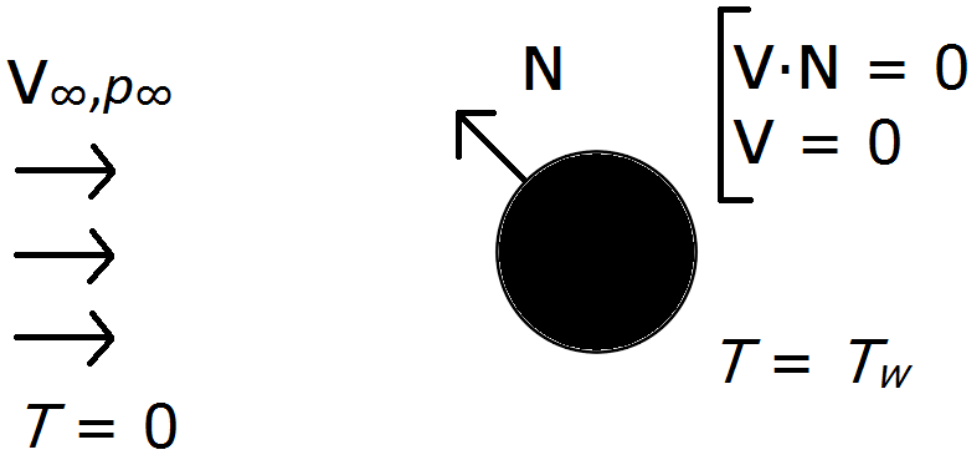
  Область течения : $\mathbb{R}^2 \setminus D$, D - пространство, занятое телом.

  $\mathbf{V}$ - скорость жидкости, p - давление, ν - кинематическая вязкость.
- При $\nu = 0$ получаются *уравнения Эйлера* (течение идеальной несжимаемой жидкости).
- Уравнение теплопроводности:

  $$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = a \Delta T + N_{diss} \tag{3}$$

  T - температура, a - коэффициент температуропроводности, N_{diss} - плотность диссипированной энергии.

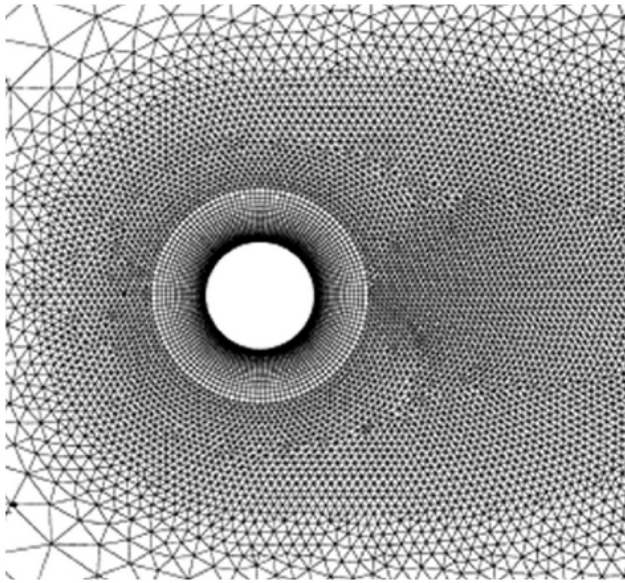
Граничные условия



- Жидкость имеет заданные значения скорости и давления на бесконечности.
- На поверхности тела ставятся:
  - $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$ - *условие непротекания* для идеальной жидкости. $\mathbf{N}$ - внешняя нормаль к поверхности тела.
  - $\mathbf{V} = 0$ - *условие прилипания* для вязкой жидкости.
- Дополнения в задаче теплоотдачи: $T = T_w$ на поверхности тела, $T \to 0$ на бесконечности.

Подходы к численному решению

- Сеточные методы
  - \+ Удобны в использовании.
  - \+ Позволяют построить консервативные схемы.
  - − Необходимы существенно неравномерные сетки.
  - − Требуется искусственно ограничивать область течения.
- Бессеточные методы
  - \+ Не требуется строить сетку.
  - \+ Не имеют искусственных ограничений на расчетную область.



https://www.hindawi.com/journals/je/2013/795237/fig5/

Вихревые методы

- Относятся к группе бессеточных методов.
- Вводится новая переменная - *завихренность*: $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$.
- Поле завихренности представляется совокупностью *вихревых элементов* (локализованные распределения завихренности).
- *Метод вязких вихревых доменов*
  - \+ Закон движения вихревых элементов строго следует из уравнений Навье-Стокса.
  - \+ Может быть модифицирован для идеальной жидкости (*метод вихревых доменов*) и для задач теплообмена (*метод вязких вихревых и тепловых доменов*).

Уравнение для завихренности

- В плоскопараллельных течениях $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z$ - орт оси, перпендикулярной плоскости течения.
- После применения оператора *rot* к уравнению баланса импульса получаем:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\Omega - \nu \nabla \Omega) = 0 \tag{4}$$

- Вводится *диффузионная скорость*[1]:

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \tag{5}$$

- Уравнение переноса завихренности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)\Omega) = 0 \tag{6}$$

- *Циркуляция* жидкости $\Gamma = \int_S \Omega ds$ сохраняется для любой области S, которая движется со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$.

[1] Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method // Computers and Fluids, 1991.

Решение уравнения для завихренности

- Пространство с ненулевой завихренностью разбивается на множество подобластей (доменов) $S_i, i = 1..N$.
- Движение домена S_i рассматривается как движение вихря $\mathbf{r}_i$, которому соответствует циркуляция Γ_i.
- Уравнение движения отдельного вихря:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{V}_d(\mathbf{r}_i) \tag{7}$$

- По построению циркуляция Γ_i не меняется с течением времени.
- Скорость жидкости $\mathbf{V}$ в произвольной точке течения $\mathbf{R}$ находится из закона Био-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \mathbf{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}}{||\mathbf{r}_i - \mathbf{R}||^2} \times \mathbf{e}_z \tag{8}$$

- Диффузионная скорость $\mathbf{V}_d$ вычисляется при помощи интегральных соотношений.
- Была предложена новая схема вычисления диффузионной скорости и показана ее корректность.

Схема метода

0. Поверхность тела аппроксимируется K-угольником, в вершины которого помещаются вихри с неизвестными циркуляциями.
1. Для определения циркуляций решается система уравнений, означающих условие непротекания в контрольных точках:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{N}_i = 0, i = 1..K \tag{9}$$

   $\mathbf{R}_i$ - позиция i-ой контрольной точки, $\mathbf{N}_i$ - нормаль к стороне K-угольника в контрольной точке.
2. После определения неизвестных циркуляций интегрируются уравнения движения вихрей.
3. Определяется давление жидкости в требуемых точках с использованием аналога интеграла Коши-Лагранжа[2].
4. Вычисляются сила давления F_p и сила трения F_w, действующие на тело со стороны жидкости.

[2] Дынникова Г.Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: дис. д-ра физ.-мат. наук. М., 2011.

Решение задачи теплообмена

- Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} T - a \nabla T) = N_{diss}$$

- При некоторых ограничениях (случай медленных потоков) можно считать $N_{diss} = 0$.
- Вводится *тепловая диффузионная скорость*[3]:

$$\mathbf{V}_{td} = -a \frac{\nabla T}{T} \tag{10}$$

- *Тепловая энергия*[3] жидкости $\Theta = \int_S T ds$ сохраняется для любой области S, которая движется со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_{td}$.
- Теплоперенос описывается совокупностью *тепловых вихрей*, каждому из которых соответствует свое значение тепловой энергии.
- Граничное условие на поверхности тела удовлетворяется при помощи введения тонкого слоя тепловых ячеек.
- Реализуется совместное решение гидродинамической и тепловой задачи.

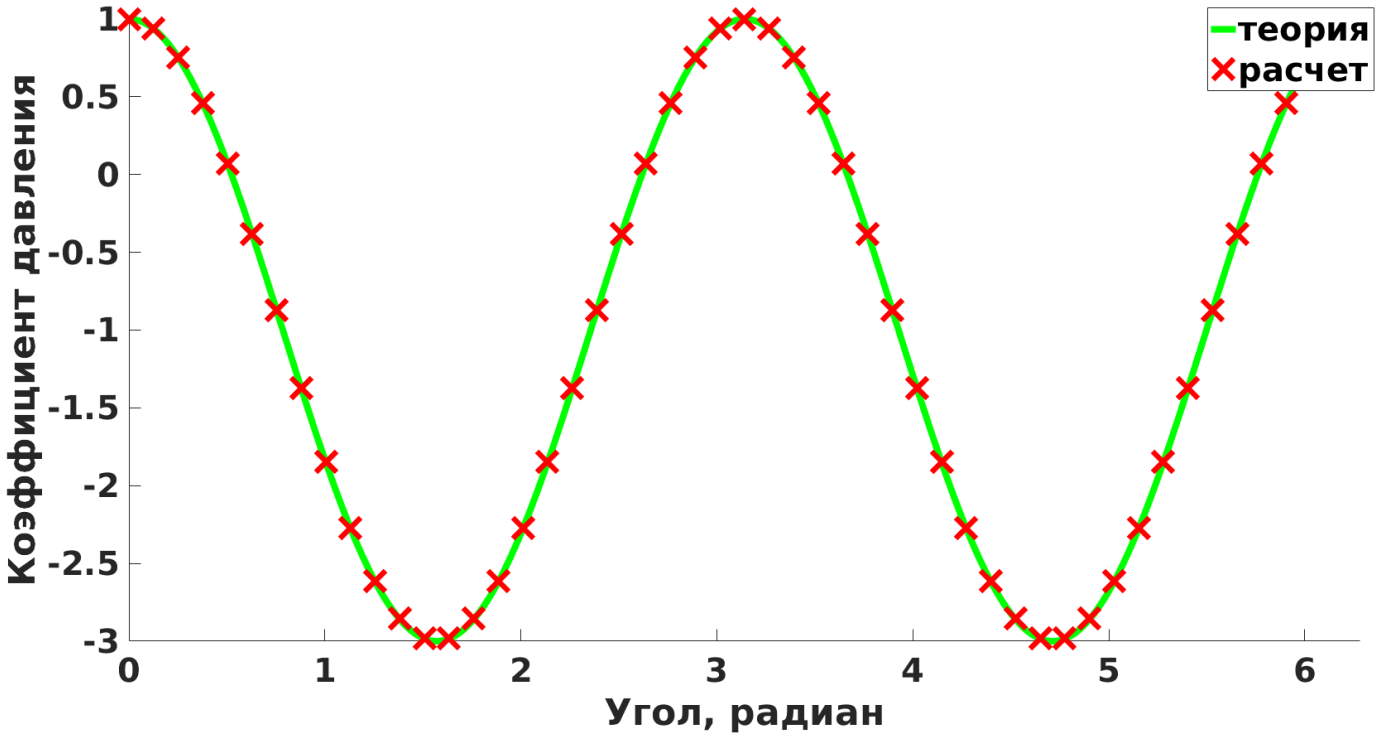
[3] Малахова Т.В. Нестационарная гидродинамика и теплообмен колеблющихся тел: дис. кандидата физ.-мат. наук. М., 2012.

Обтекание цилиндра идеальной жидкостью

- Рассматривается обтекание неподвижного кругового цилиндра.
- Коэффициент давления в произвольной точке **R**:

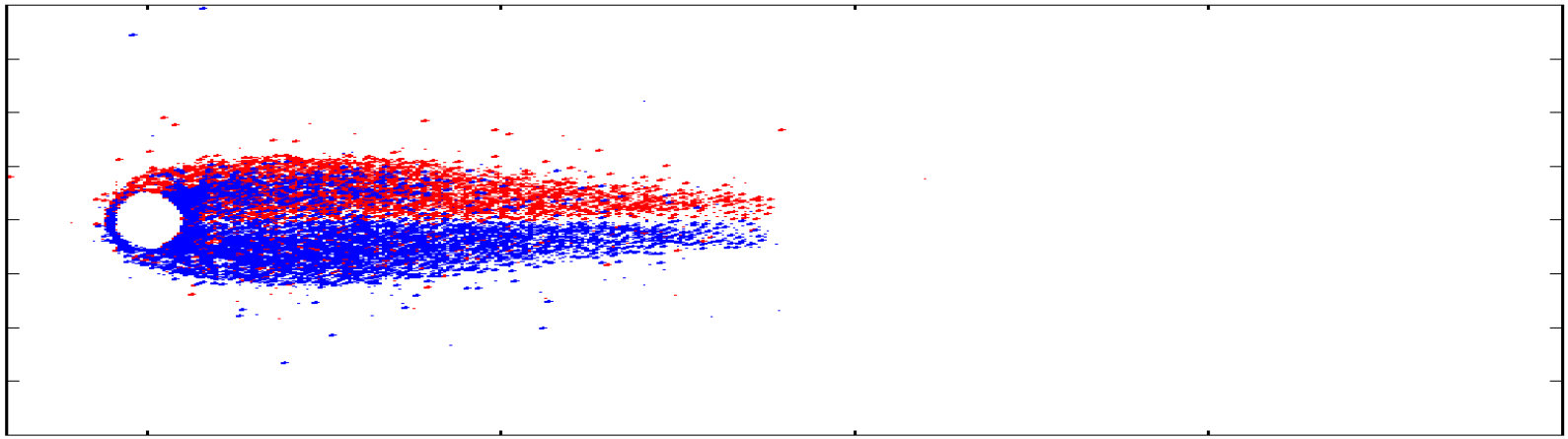
$$c_p(\mathbf{R}) = \frac{p(\mathbf{R}) - p_\infty}{\frac{\rho|\mathbf{V}_\infty|^2}{2}} \tag{11}$$

- $K = 50$.



Обтекание цилиндра вязкой жидкостью

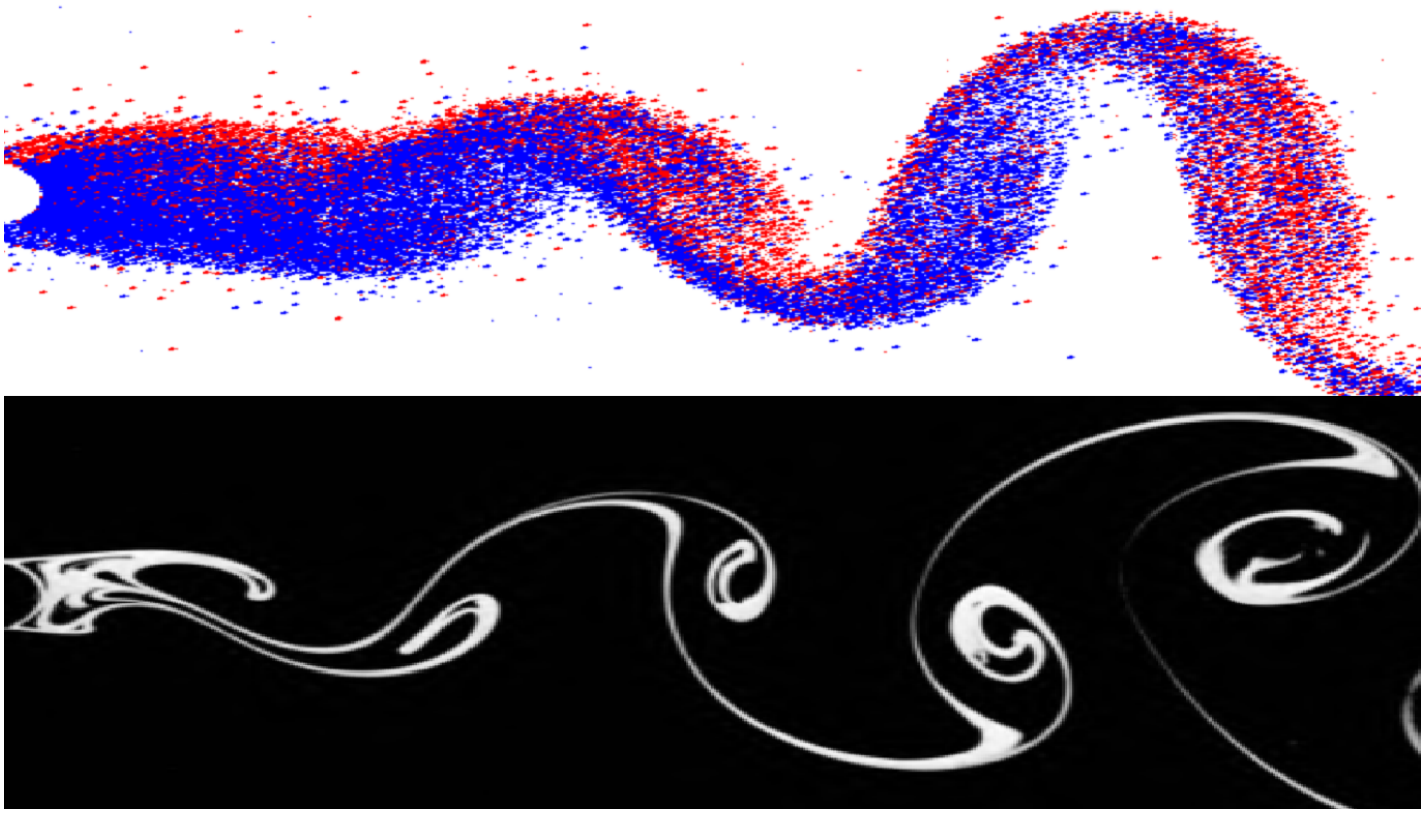
- $Re = \frac{2R|\mathbf{v}_\infty|}{\nu} = 250$, R - радиус цилиндра.
- $K = 500$.



- Образуется симметричная зона рециркуляции.

Обтекание цилиндра вязкой жидкостью (2)

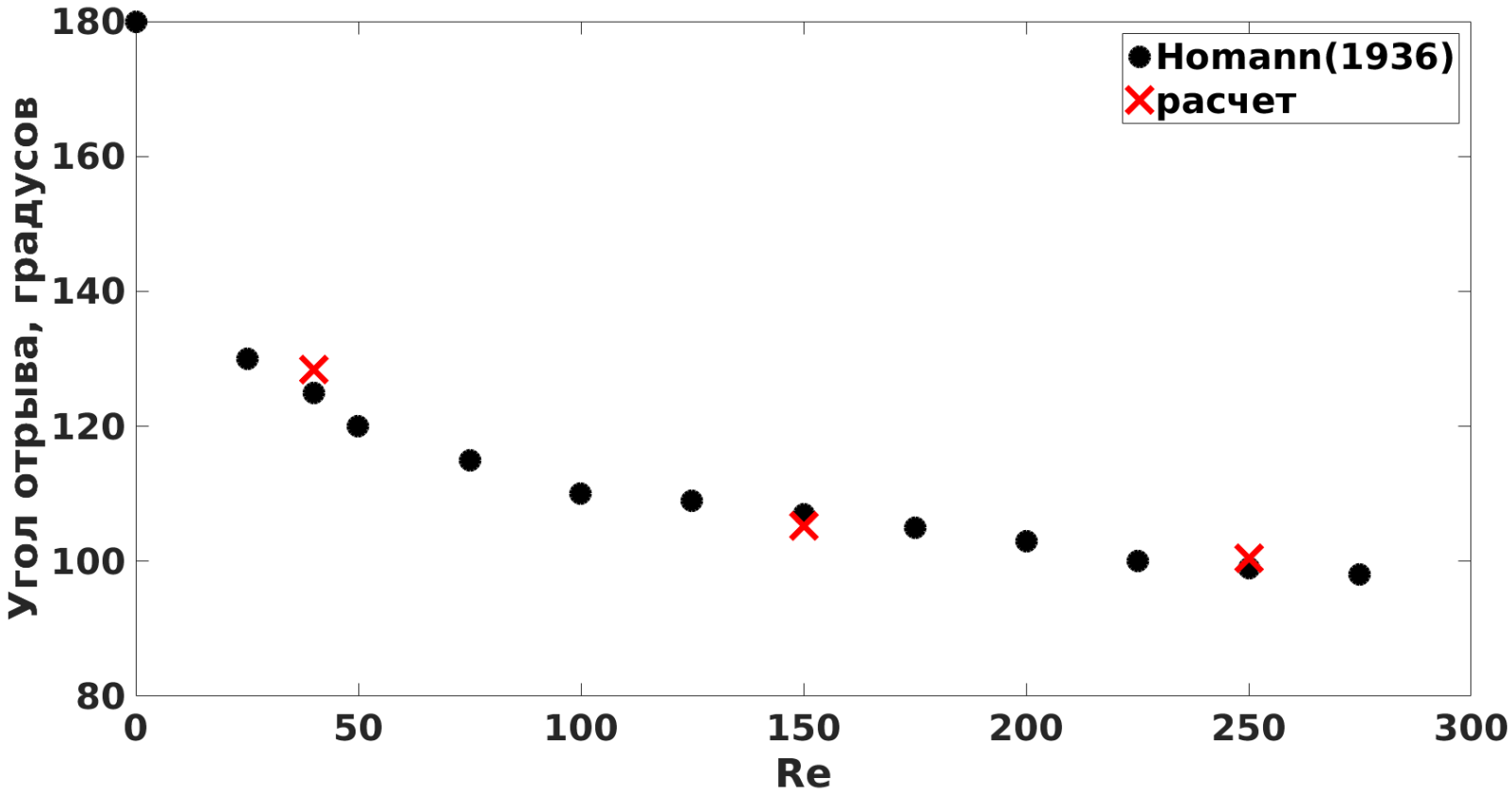
- Число вихрей в течении достигает 100 тыс.



[4] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.

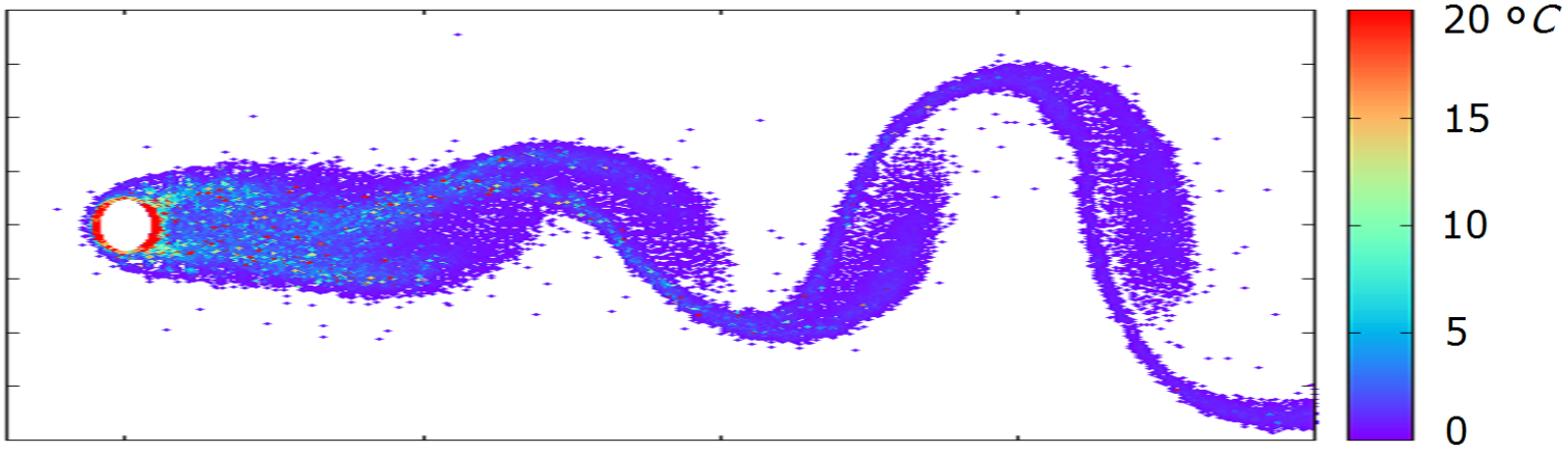
Расчет точки отрыва

- Был произведен расчет точки отрыва течения для нескольких чисел Рейнольдса и проведено сравнение с экспериментальными данными.



Расчет тепловой задачи

- $\mathrm{Re} = 250$, $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = 5$.
- $T_w = 20\ ^\circ C$.



- Образуется тепловая дорожка Кармана.

Заключение

- Приведено строгое построение метода вязких вихревых доменов для задач внешнего обтекания, где набегающий поток можно считать плоскопараллельным и несжимаемым.
- Рассмотрены метод вихревых доменов для течений идеальной жидкости, метод вязких вихревых доменов для течений вязкой жидкости, а также метод вязких вихревых и тепловых доменов для неизотермических течений.
- Для задачи обтекания неподвижного кругового цилиндра продемонстрировано возникновение дорожки Кармана, наблюдающейся в эксперименте.
- Для ряда важных гидродинамических характеристик показано согласие полученных результатов с аналитическими и экспериментальными данными.

Закон Био-Савара-Лапласа

- Определение завихренности:

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$$

- $rot\mathbf{\Omega} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}$
- Подставляя уравнение неразрывности, получаем уравнение Пуассона:

$$\Delta\mathbf{V} = -\nabla \times \mathbf{\Omega}$$

- Его решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \mathbf{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\int_S \Omega(\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{||\mathbf{r}-\mathbf{R}||^2} \times \mathbf{e}_z d\mathbf{r}$$

  S - область течения.

- Интеграл заменяется суммой.

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{R}}{||\mathbf{r}_i-\mathbf{R}||^2} \times \mathbf{e}_z$$

Соотношения для диффузионной скорости

- Выражение для диффузионной скорости:

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}$$

- Представление для завихренности:

$$\Omega(\mathbf{R}) = \frac{I_1(\mathbf{R})}{I_0(\mathbf{R})} \tag{12}$$

$$I_1(\mathbf{R}) = \int_S \Omega(\mathbf{r}) exp(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon}) d\mathbf{r}$$

$$I_0(\mathbf{R}) = \int_S exp(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon}) d\mathbf{r}$$

S - область течения, $exp(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon})$ - аппроксимация дельта-функции Дирака $\delta(|\mathbf{R}-\mathbf{r}|)$.

- Далее (12) дифференцируется по $\mathbf{R}$.

$$\nabla \Omega(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{I}_2(\mathbf{R})}{I_0(\mathbf{R})} - \frac{\mathbf{I}_3(\mathbf{R}) I_1(\mathbf{R})}{I_0^2(\mathbf{R})} \tag{13}$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{R}) = \nabla I_1(\mathbf{R})$$

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{R}) = \nabla I_0(\mathbf{R})$$

Соотношения для диффузионной скорости (2)

- Интегралы, содержащие завихренность, заменяются суммами.

$$I_1(\mathbf{R}) \approx \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i exp(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|}{\varepsilon})$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{R}) \approx -\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|\varepsilon} \Gamma_i exp(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|}{\varepsilon})$$

- Оставшиеся интегралы преобразуются к контурным:

$$I_0(\mathbf{R}) \approx 2\pi\varepsilon - \sum_{i=1}^{K} \frac{(\xi_i \cdot \mathbf{N}_i) d_i}{|\xi_i|^2} (|\xi_i| + 1) exp(-|\xi_i|)$$

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{R}) \approx \sum_{i=1}^{N} \mathbf{N}_i d_i exp(-|\xi_i|)$$

d_i - длина i-ой стороны K-угольника, $\xi_i = \frac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_i}{\varepsilon}$

Раздельный расчет завихренности

- Выражение для диффузионной скорости:

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}$$

  При Ω близких к 0 получаем неоправданно высокие значения диффузионной скорости.

- Уравнение для переноса завихренности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\Omega - \nu \nabla \Omega) = 0$$

- Положим $\Omega^+ = \frac{\Omega + |\Omega|}{2}, \Omega^- = \frac{\Omega - |\Omega|}{2}$. Тогда имеем:

$$\frac{\partial \Omega^+}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\Omega^+ - \nu \nabla \Omega^+) + \frac{\partial \Omega^-}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\Omega^- - \nu \nabla \Omega^-) = 0$$

- Для достаточно гладких распределений завихренности из условия $\Omega > 0$ следует, что $\Omega \geq 0$ в некоторой окрестности. Тогда получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega^+}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\Omega^+ - \nu \nabla \Omega^+) = 0, & \Omega > 0 \\ \frac{\partial \Omega^-}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\Omega^- - \nu \nabla \Omega^-) = 0, & \Omega < 0 \\ \Omega = 0 \end{cases}$$

- Первые два уравнения решаются рассмотренным методом.

Давление жидкости

- Давление вычисляется при помощи аналога интеграла Коши-Лагранжа[2]:

$$\frac{p(\mathbf{R})}{\rho} \approx \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{\mathbf{V}(\mathbf{R})^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}}{||\mathbf{r}_i - \mathbf{R}||^2} \times \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{V}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{V}_d(\mathbf{r}_i)) -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{\Gamma_k}{\Delta t} \alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k)$$

- Во вторую сумму входят только поверхностные вихри.

  Δt - шаг по времени, $\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k)$ - угол, под которым отрезок $[\mathbf{R}; \mathbf{r}_k]$ виден из точки $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_0$ - точка внтури тела.

Силы, действующие на тело

- Сила давления (C - поверхность тела):

$$F_p = \oint_C \mathbf{N} p d\gamma \tag{14}$$

Интеграл заменяется суммой.

$$F_p \approx \sum_{i=1}^{K} \mathbf{N}_i d_i p(\mathbf{R}_i)$$

- Сила трения:

$$F_w = \nu \oint_C \mathbf{N} \times \Omega \mathbf{e}_z d\gamma \tag{15}$$

Можно преобразовать это выражение, используя представление для завихренности (12), и затем аппроксимировать.

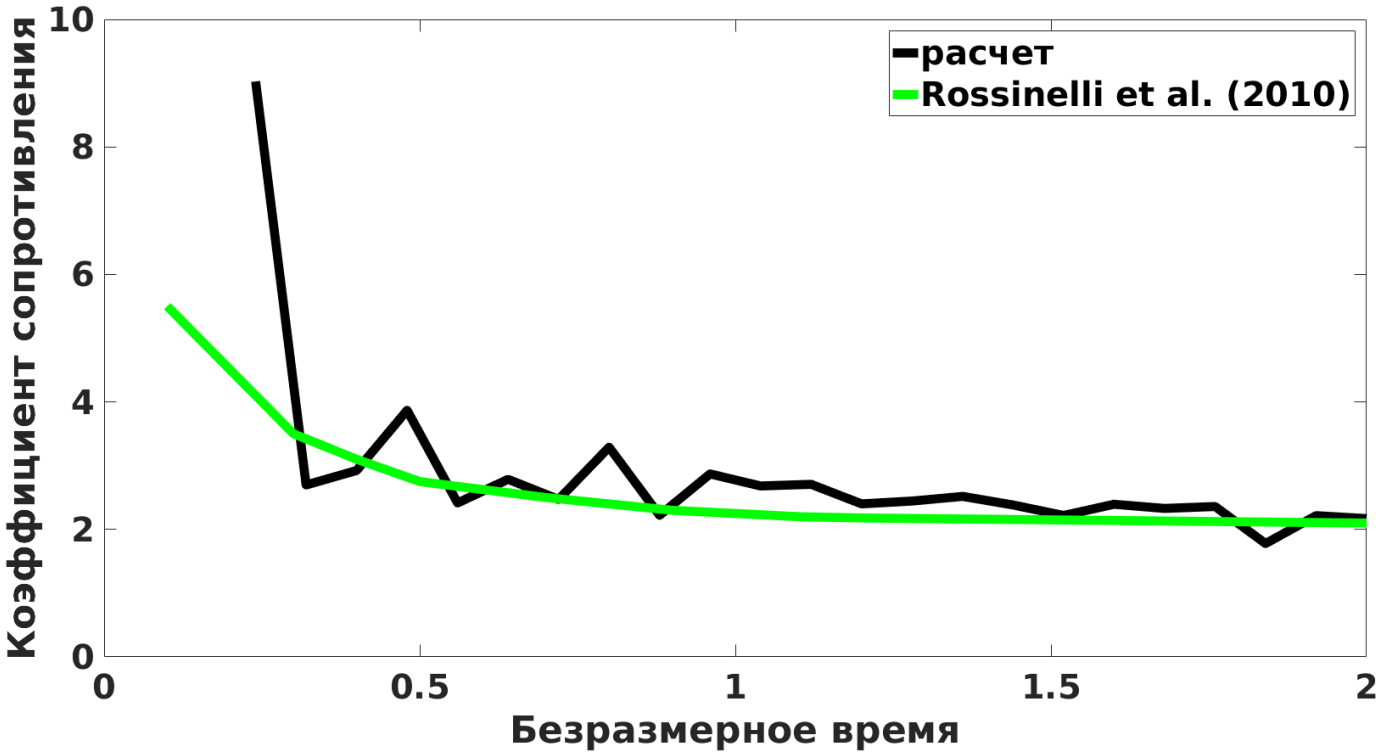
$$F_w \approx \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \mathbf{e}_z \times \sum_{k=1}^{K} \mathbf{N}_k \frac{d_k}{l_0(\mathbf{R}_k)} exp(-\frac{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|}{\varepsilon})$$

Дальнейшие исследования

- Учет движения и деформации тела.
- Другие задачи теплообмена.
- Переход к трехмерным течениям.
- Оптимизация численной процедуры и улучшение дискретизации.
- Схемы повышенного порядка точности.

Обтекание цилиндра вязкой жидкостью (3)

- $Re = 40$.
- Коэффициент сопротивления:

$$C_D = \frac{(F_p)_x + (F_w)_x}{\frac{\rho |\mathbf{V}_\infty|^2 D}{2}} \tag{16}$$

- $K = 1000$.