

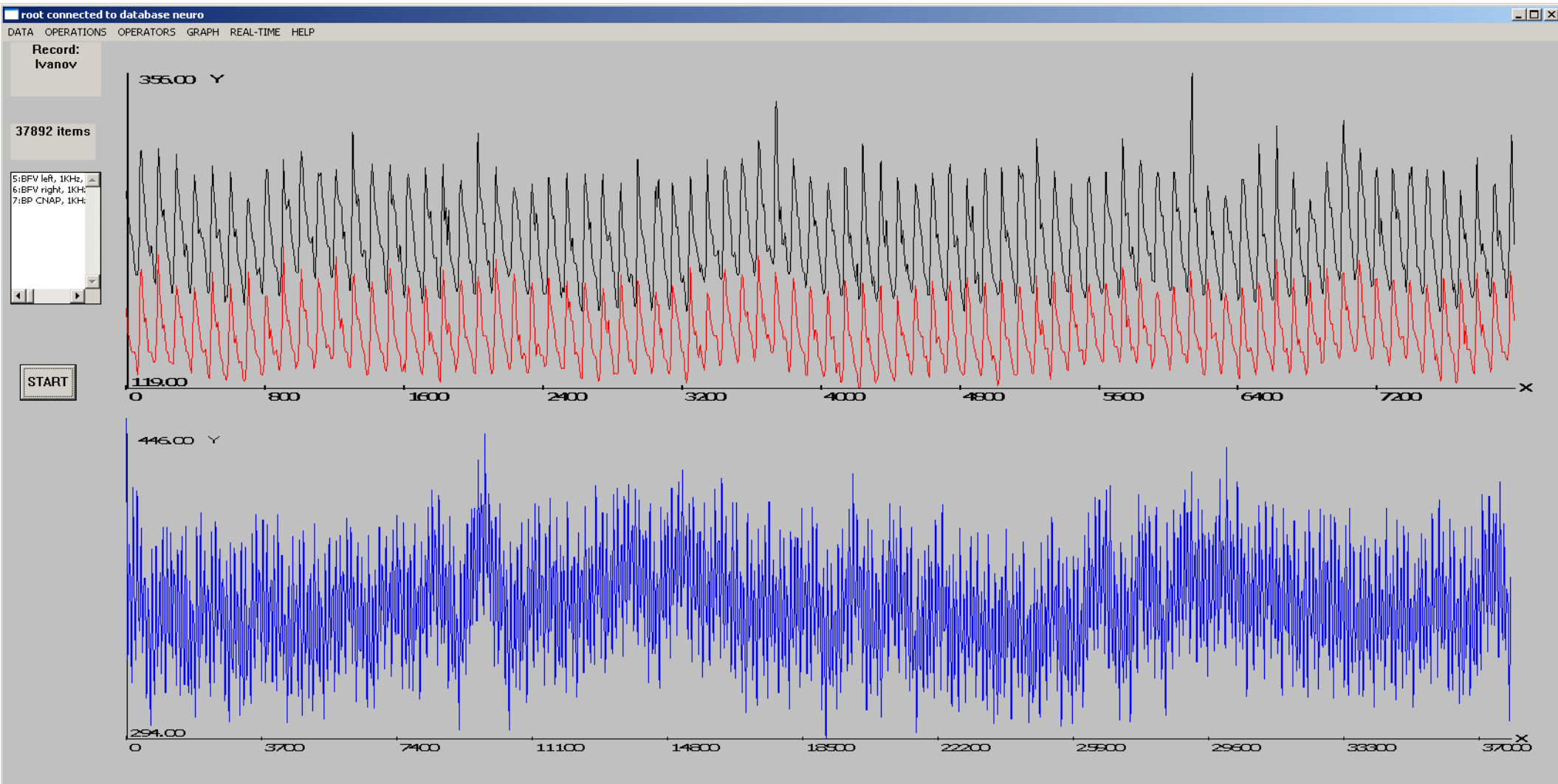
Изучение оценок фрактальных  
размерностей детерминированных  
слагаемых аддитивных моделей  
процессов, регистрируемых в  
транскраниальной доплерографии

Выполнил: Кутузов А.В.

Научный руководитель: Иванков А.А.

# Объект исследования(1)

Сигналы, интерпретируемые как линейная скорость кровотока (ЛСК\*) и артериальное давление(АД)



(\* ) регистрируемые ультразвуковыми датчиками Multi Dop X в ходе доплерографического исследования кровообращения

# Объект исследования(2)

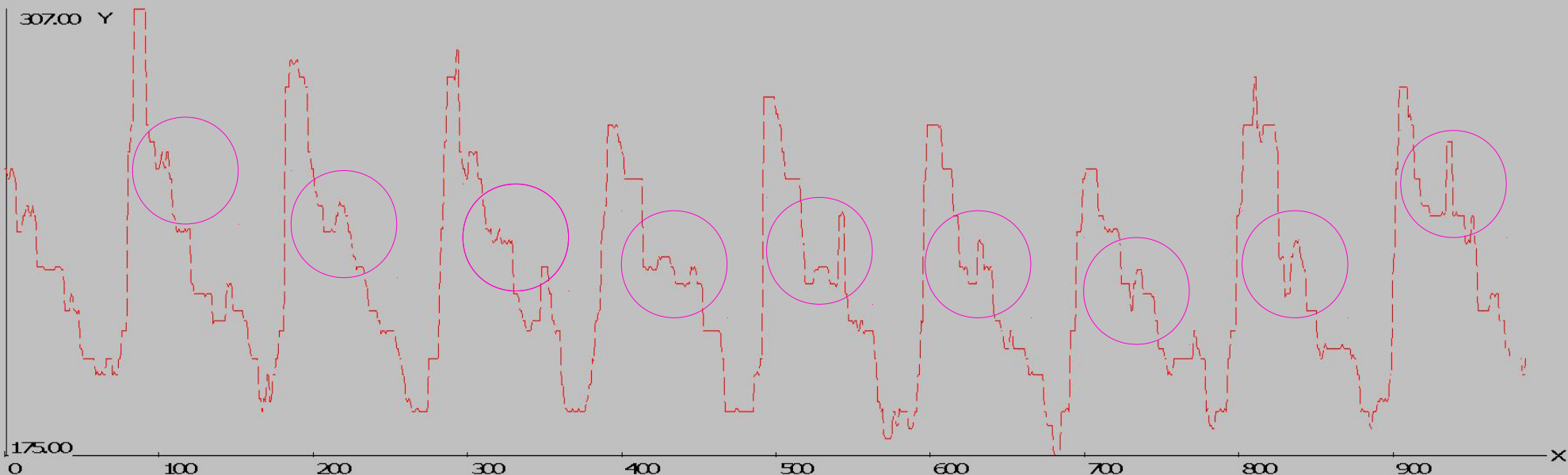
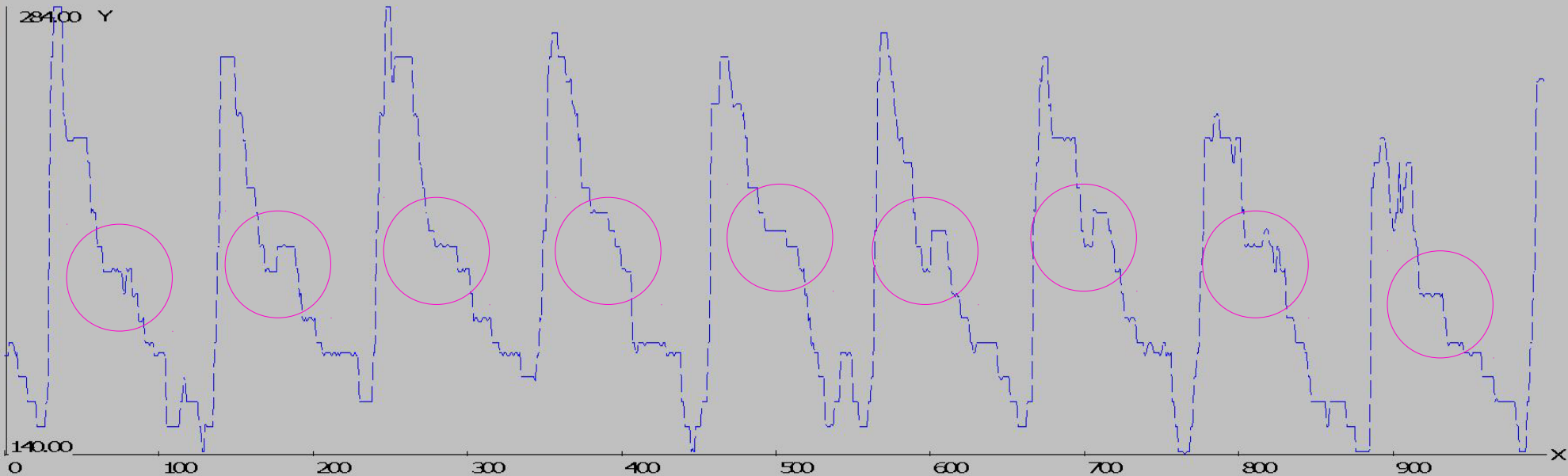
FILE OPERATIONS ONLINE OPERATORS GRAPH HELP

Record:  
Ivanov

1000 items

1:BPV left, 1KHz,  
5:BPV left, 1KHz,

START



# Модель(1)

$$X(t) = \sum_Y + \sum_Z \quad (1)$$

$$\text{где } \sum_Y = \sum_i^{k(t)} Y_i(t), \quad \sum_Z = \sum_j^{m(t)} Z_j(t)$$

$X(t)$  – регистрируемый сигнал

$Z_j(t)$  – траектории квазипериодических детерминированных процессов

$Y_i(t)$  – траектории случайных процессов

$m(t)$  – число детерминированных слагаемых

$k(t)$  – число стохастических слагаемых

$n = k(t) + m(t)$  – длина траектории  $X(t)$

# Модель(2)

$$Z(t): MesZ(t+T+\delta_Z(t)) = MesZ(t) + \varepsilon_Z(t) \quad (2)$$

$$Y(t): MesY(t+\delta_Y(t)) = MesY(t) + \varepsilon_Y(t) \quad (3)$$

$MesK(\dots)$  – случайные меры, где  $K = Z, Y$

$T$  – длина периода той компоненты спектра, которая вносит основной вклад в его спектральную плотность

$\delta_K(\cdot) \sim o(\cdot)$  – отклонение длительности конкретного периода от его оценки в среднем

$\varepsilon_K(t) \sim o(MesK(t))$  – отклонение оценки функции распределения ординаты процесса  $K(t)$  от его оценки в среднем

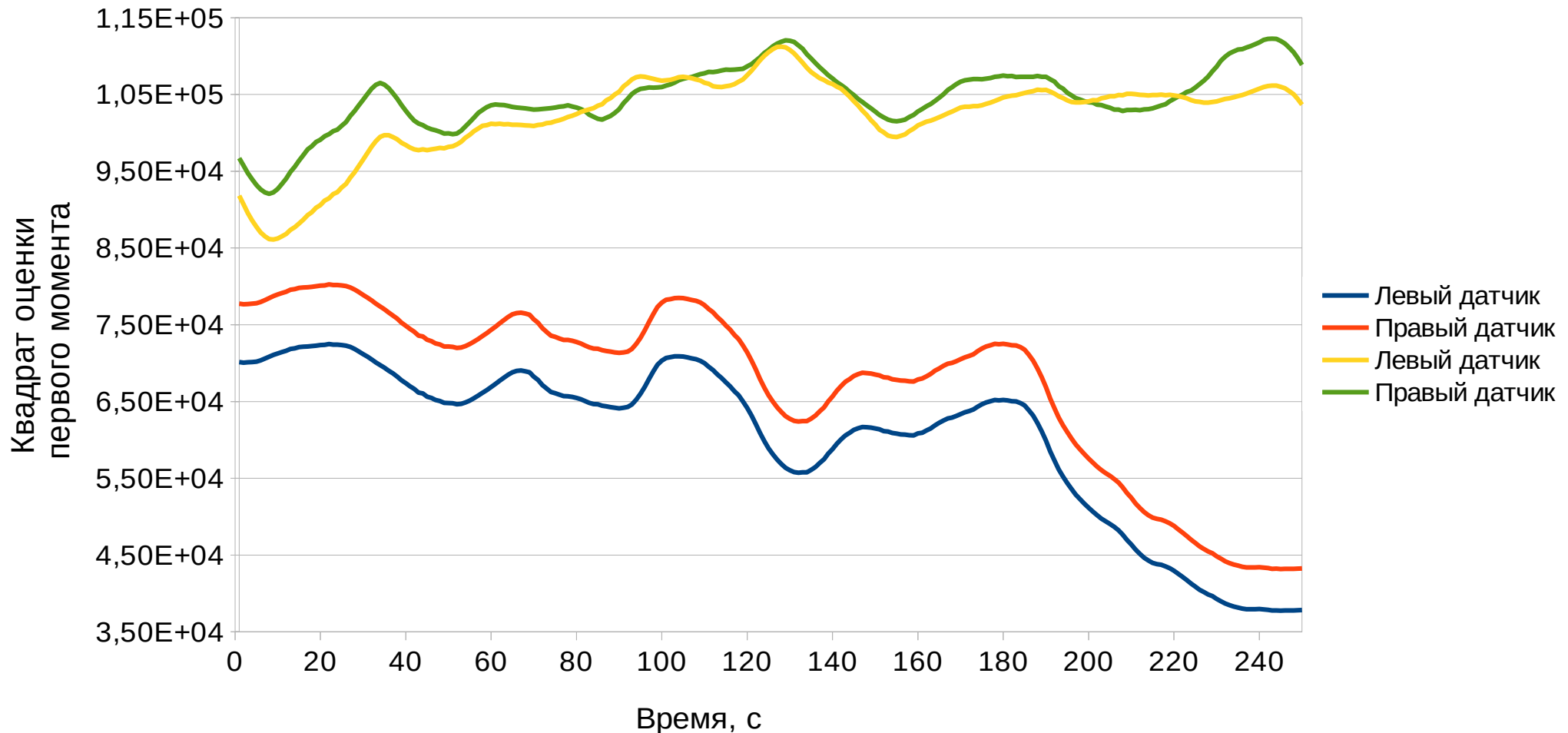
# Цель работы

Анализ математических моделей, используемых в медико-биологических исследованиях ЛСК и АД

## Конкретные задачи

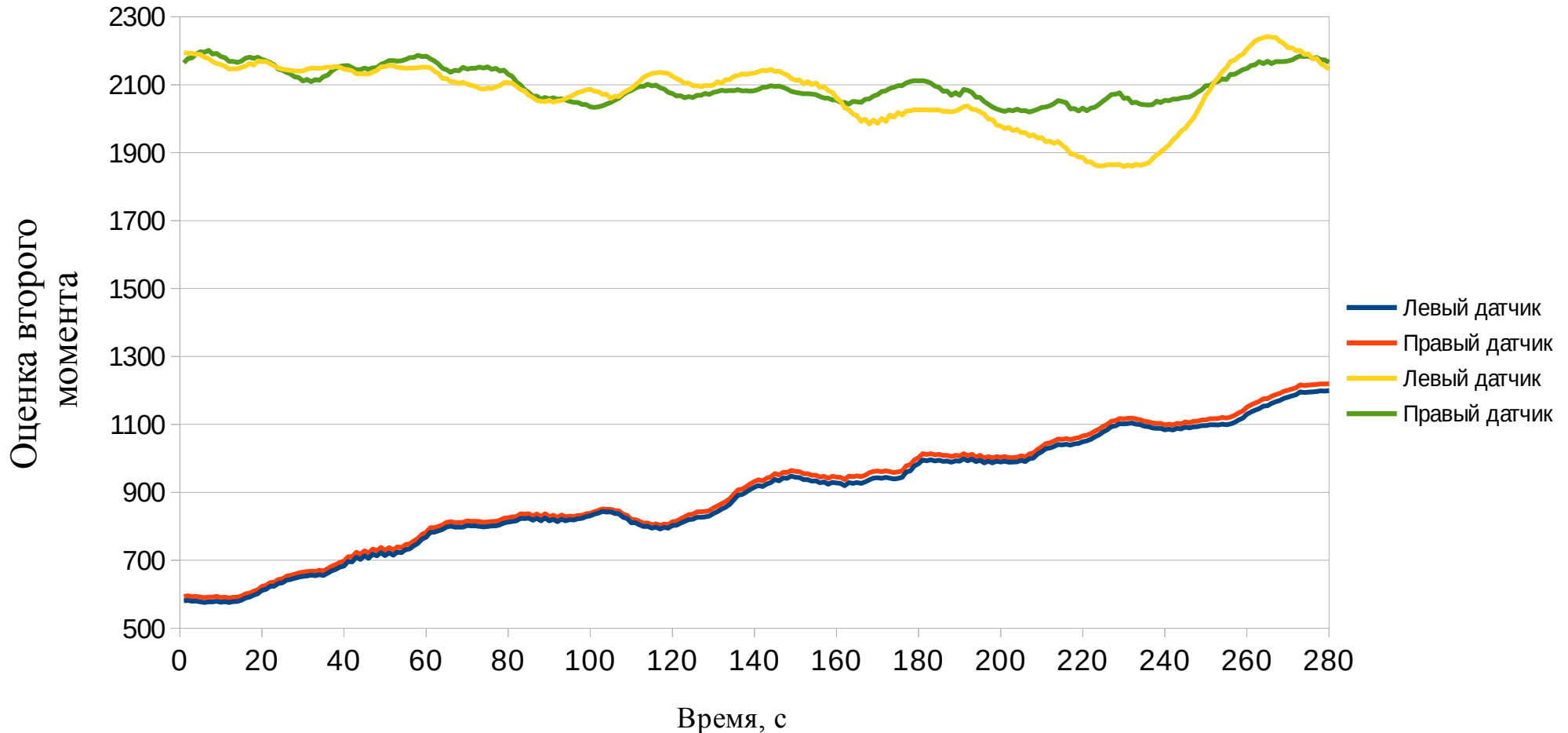
1. Реализовать алгоритмы идентификации слагаемых  $\sum_Y, \sum_Z$ 
  - 1.1 Идентификация стохастических слагаемых в (1)
  - 1.2 Построение оценок корреляционной и фрактальной размерностей  $\sum_Y, \sum_Z$
2. Реализовать алгоритмы идентификации квазистационарных участков исследуемых процессов
3. Оценить меру связи ЛСК и АД на квазистационарных участках процессов

# Нестационарность исследуемых процессов (1)



Оценки первого момента исследуемых процессов  
(полученные для одного и того же пациента с интервалом в полгода)

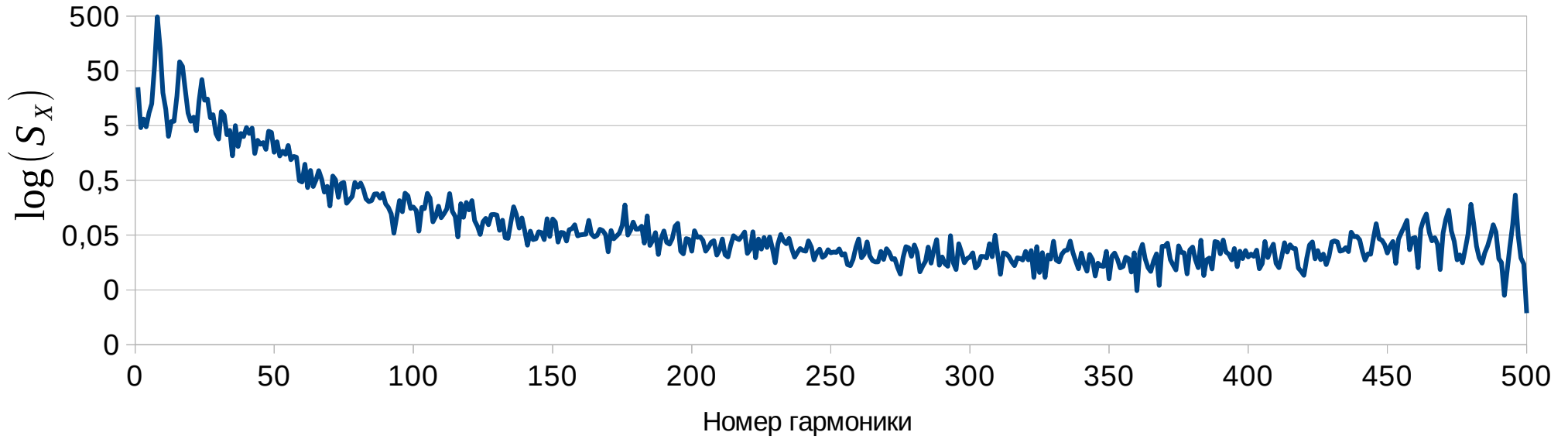
# Нестационарность исследуемых процессов (2)



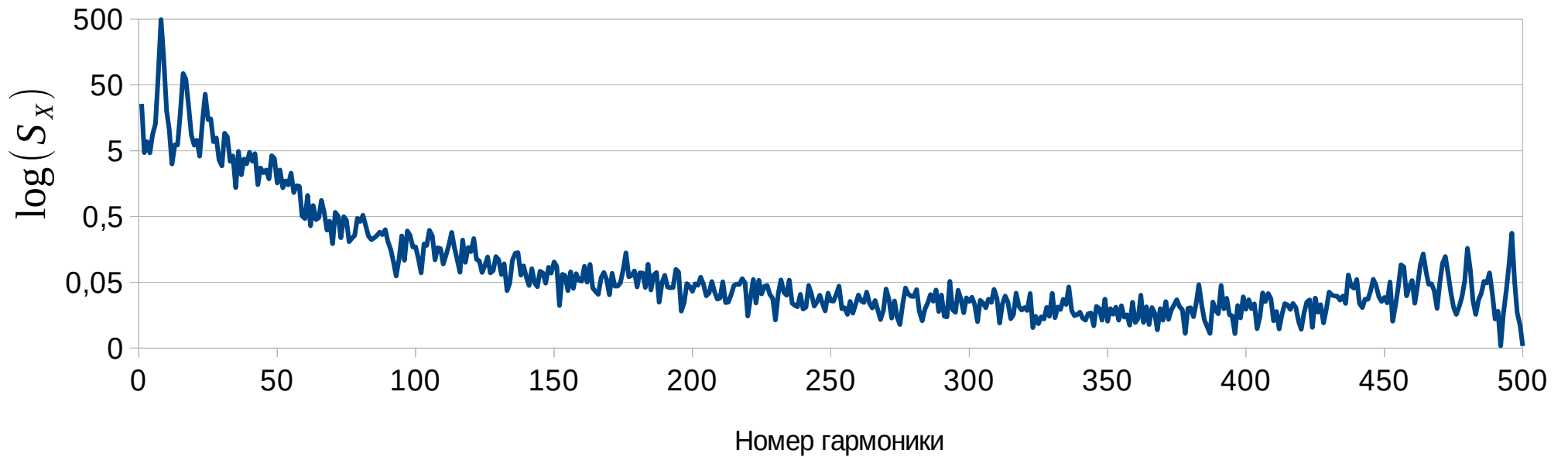
Оценки второго момента исследуемых процессов  
(полученные для одного и того же пациента с интервалом в полгода)



# Оценки спектральной плотности $S_X$



*Периодограмма сигнала, зарегистрированного правым датчиком*



*Периодограмма сигнала, зарегистрированного левым датчиком*

# Идентификация $\Sigma_Y$ (1)

Упорядочиваем множество оценок спектральной плотности:

$$\{S_X^i\}, i \in \{1, (n/2)^*\}, S_X^i > S_X^{i+1} \quad (4)$$

Пока отклоняется нулевая гипотеза:

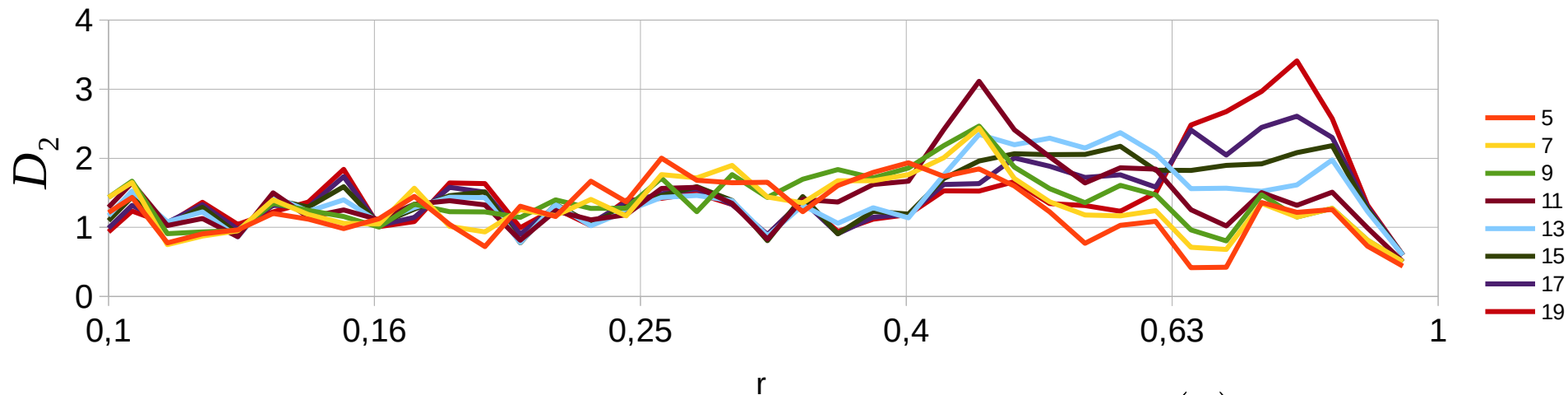
$$H_0: \{S_X^i\} \sim U[a, b] \quad (5)$$

удаляем элемент с индексом  $i=1$

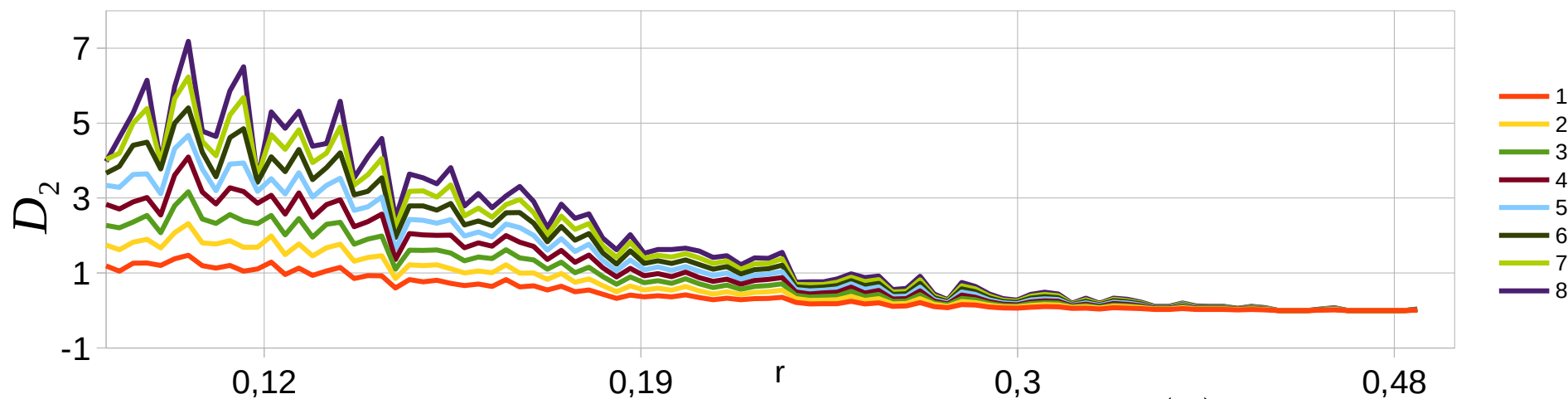
\* выделяем целую часть



# Оценки размерностей аттракторов у детерминированных слагаемых(2)



Оценки размерностей аттракторов, определяемых  $Z_j(t)$  гармониками



Оценки размерностей аттракторов, определяемых  $Z_j(t)$  гармониками

# MFDFA

Пусть  $w(t)$  – анализируемый ряд, стандартное отклонение:

$$F_k(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=k\tau+1}^{(k+1)\tau} (w(t) - tr(t))^2} \quad (6)$$

$tr(t)$  полиномиальный тренд на интервале размером  $\tau$

Среднее значение по  $\frac{L}{\tau}$  интервалам:

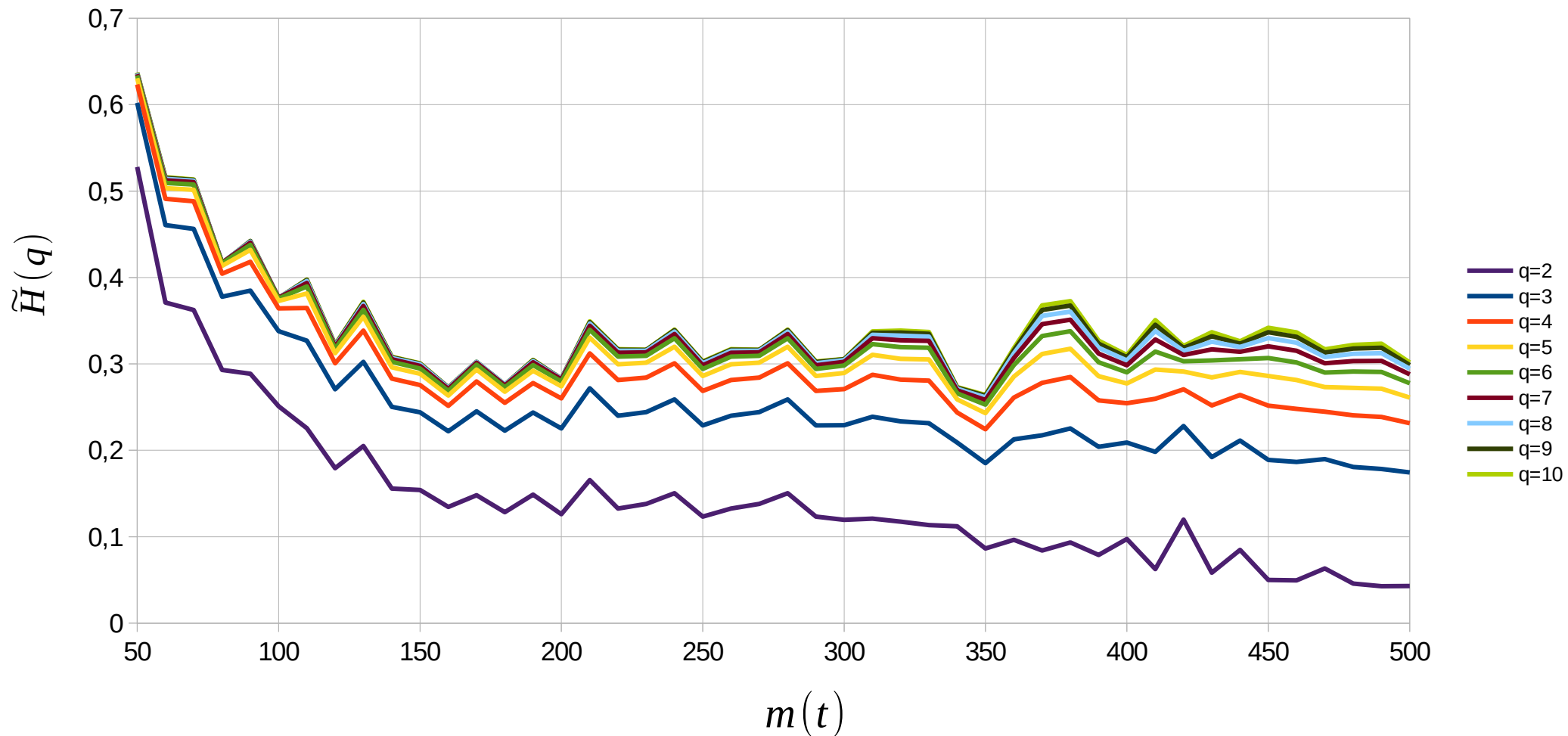
$$\langle F_q^2(\tau) \rangle = \left( \frac{\tau}{L} \sum_{k=0}^{\frac{L}{\tau}-1} F_k^{\frac{q}{2}}(\tau) \right)^{\frac{1}{q}} \quad (7)$$

Оценка обобщенной фрактальной размерности  $\tilde{H}(q)$

$$\sqrt{\langle F_q^2(\tau) \rangle} \sim \tau^{\tilde{H}(q)} \quad (8)$$

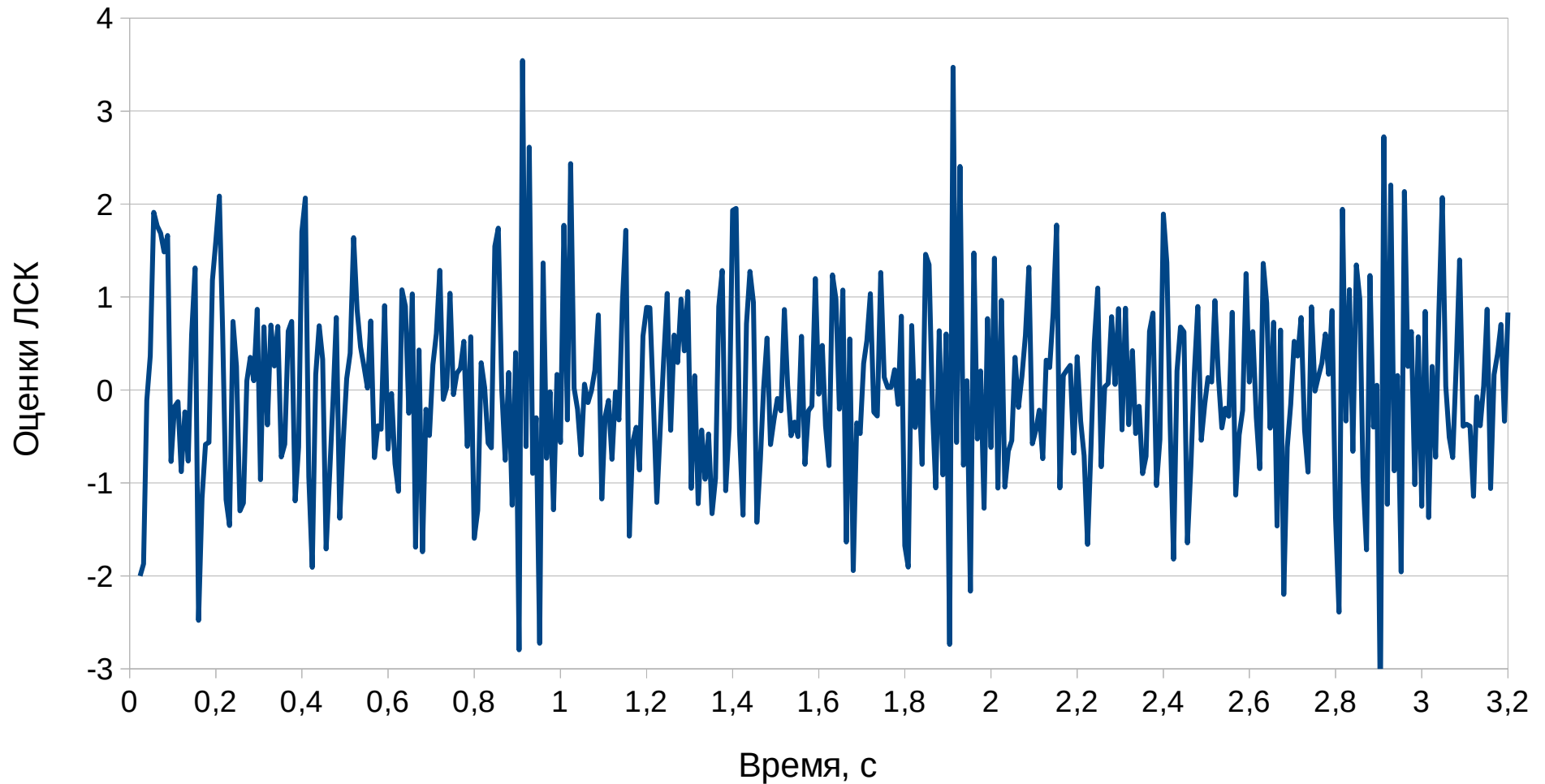
# Обобщенная фрактальная размерность для $\Sigma_Y$

$$G_{MFDEFA(q)}(G_{SF}(G_{FFT}(X(t)))) : X(t) \rightarrow \tilde{H}(q)$$



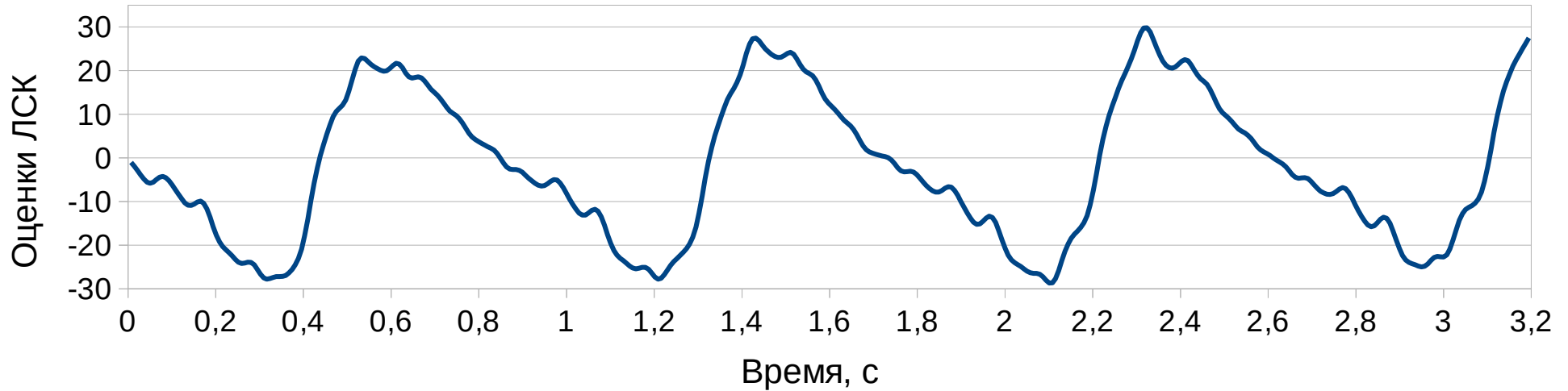
# Восстановленный сигнал для $\{Y_i(t)\}$ слагаемых

$$G_{INVFFT} (G_{SF} (G_{FFT} (X(t)))) : X(t) \rightarrow Y(t)$$



# Восстановленный сигнал для $\{Z_j(t)\}$ слагаемых и исходный сигнал

$$G_{INVFFT} (G_{DF} (G_{FFT} (X(t)))) : X(t) \rightarrow Z(t)$$

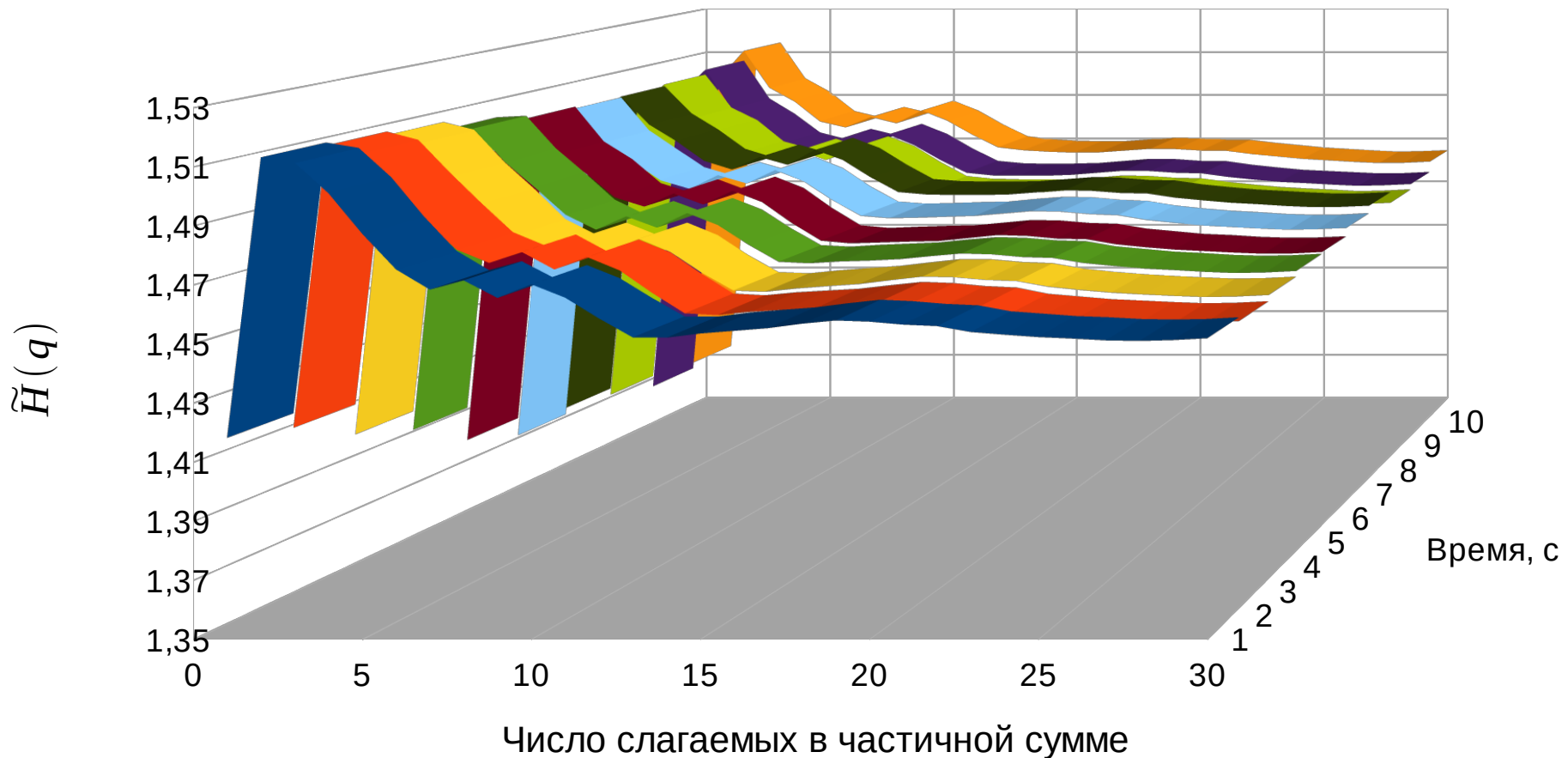




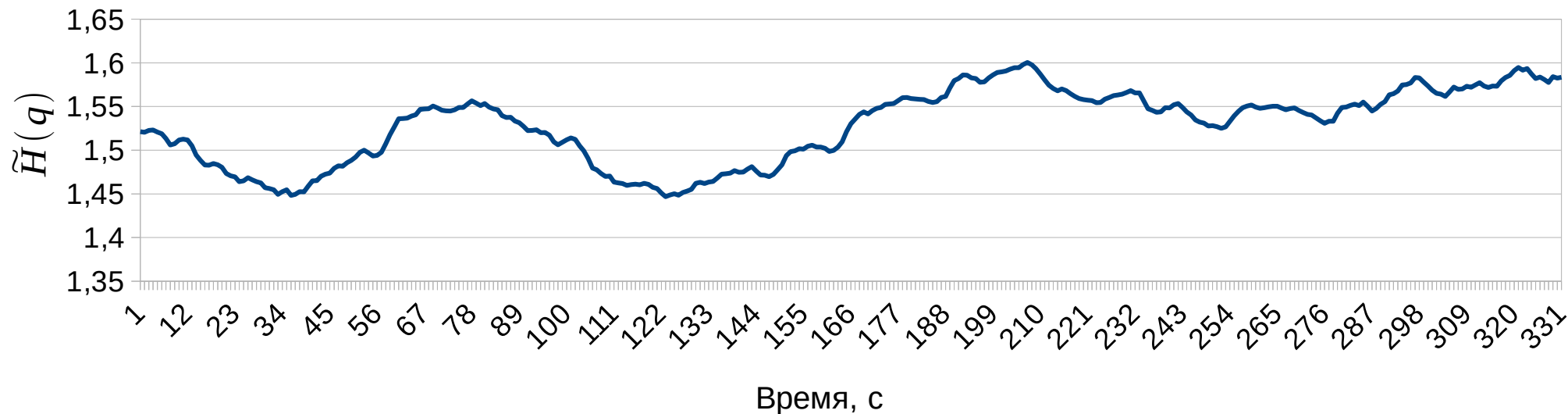
# Фрактальная размерность

для частичных сумм  $S_{\sum_j z_j}$

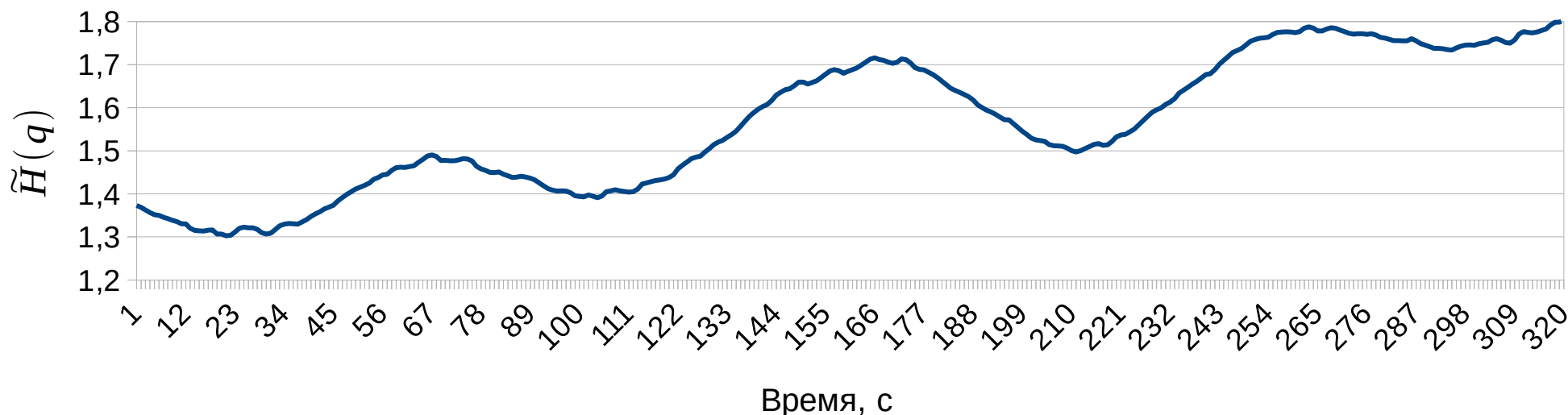
$$G_{MFDFA} \left( \sum_1^p G_{DF} (G_{FFT} (X(t))) \right) : X(t) \rightarrow \tilde{H}(t, p), \quad p < m(t)$$



# Фрактальная размерность для суммы из 25 гармоник (пациент с патологией)

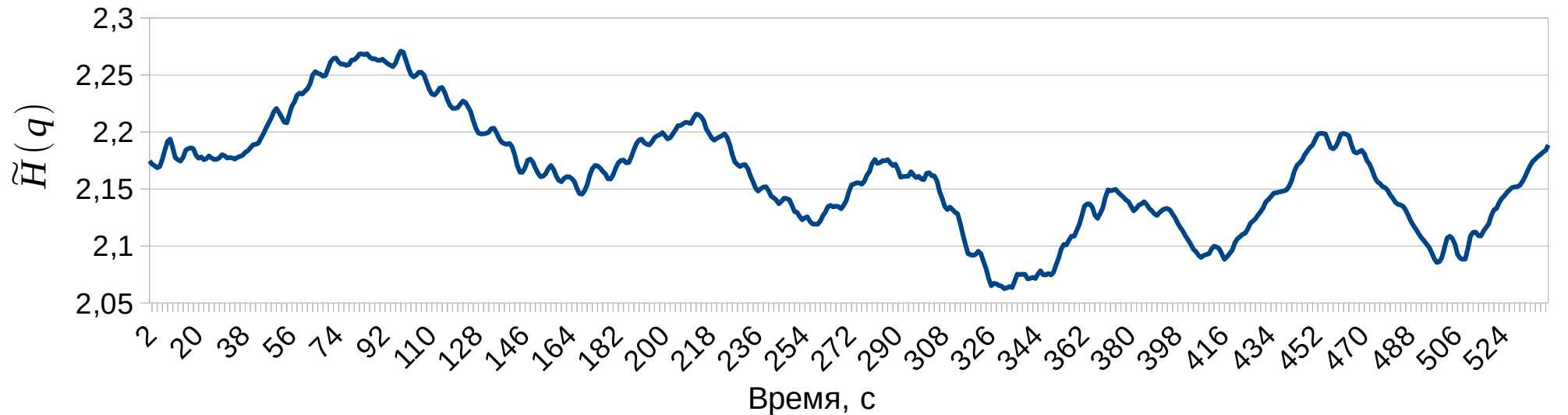
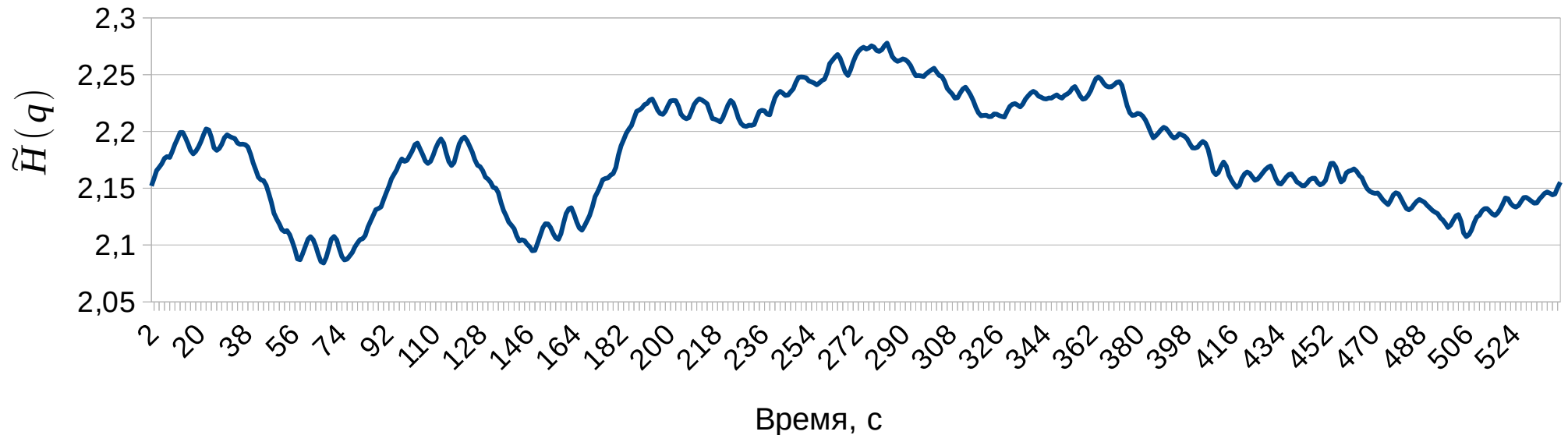


## Обобщенная фрактальная размерность сигнала ЛСК в состоянии покоя



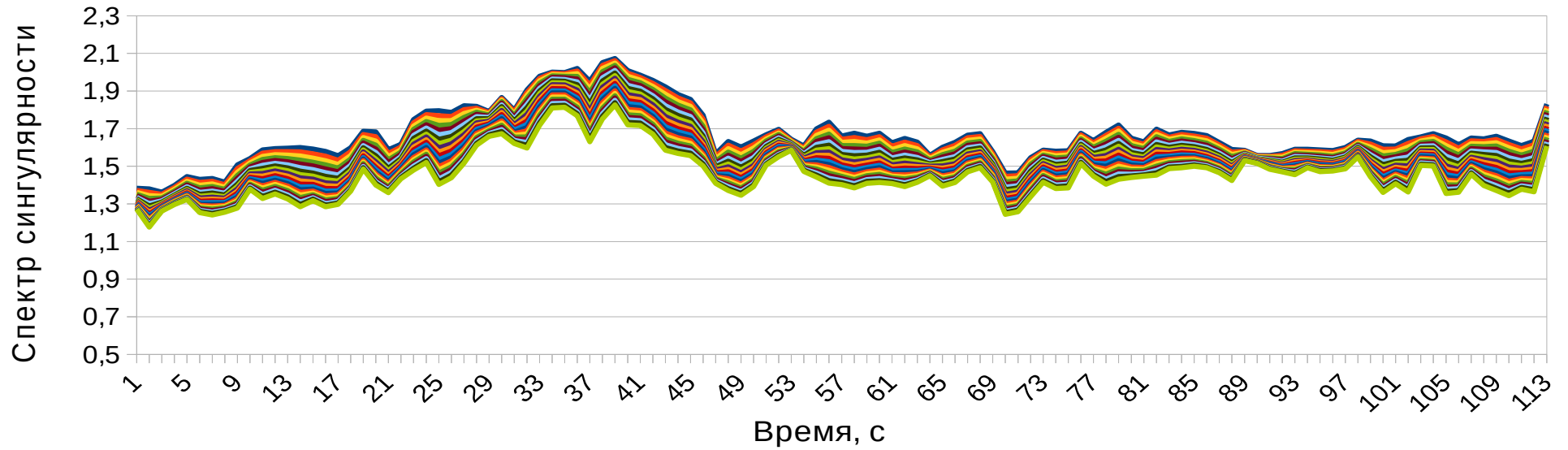
## Обобщенная фрактальная размерность сигнала ЛСК при прохождении теста на гипокапнию

# Фрактальная размерность для суммы из 25 гармоник (здоровый доброволец)

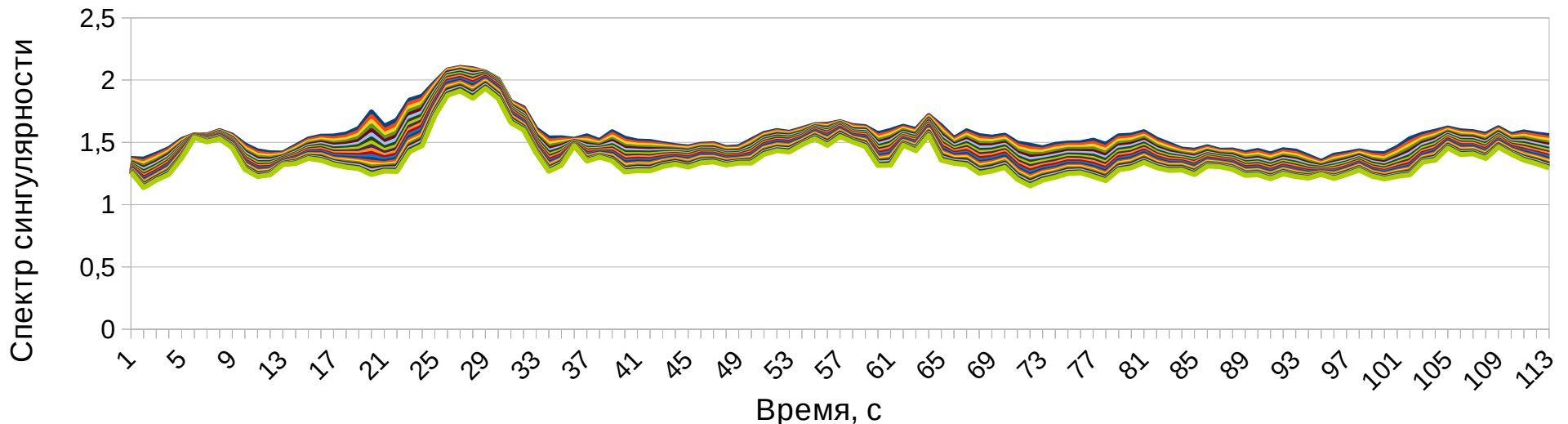


# Поиск квазистационарных участков

$$G_{SPSIN(q)}(G_{DF}(G_{FFT}(X(t)))) : X(t) \rightarrow f(t, q)$$

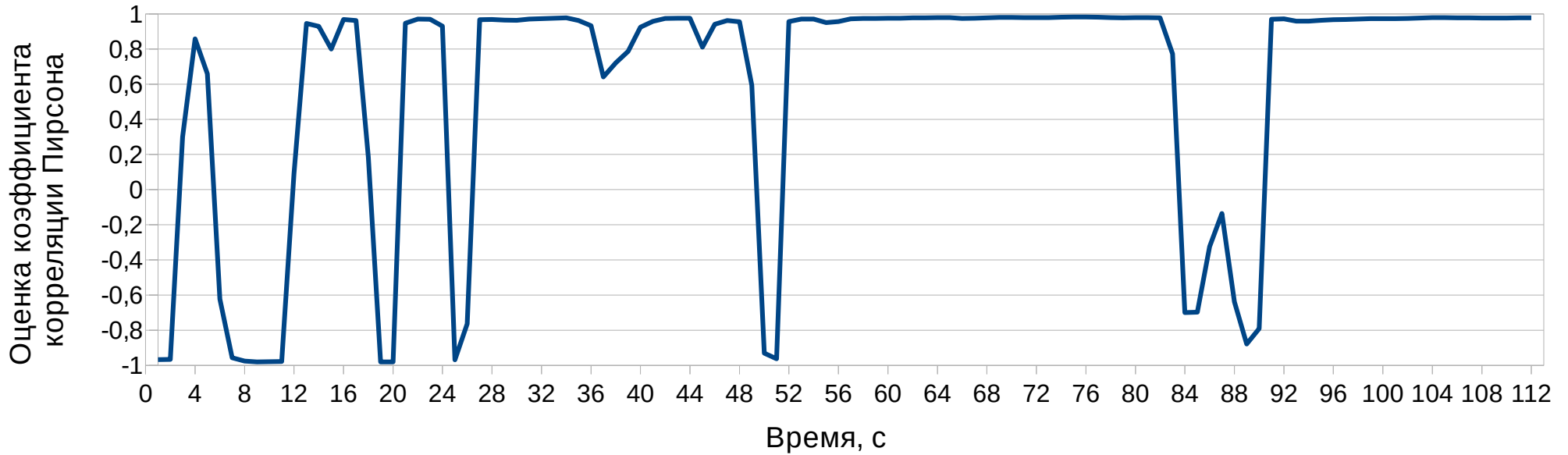


Спектр сингулярности для различных  $q$  восстановленного сигнала из  $Z_j(t)$  слагаемых для траектории ЛСК

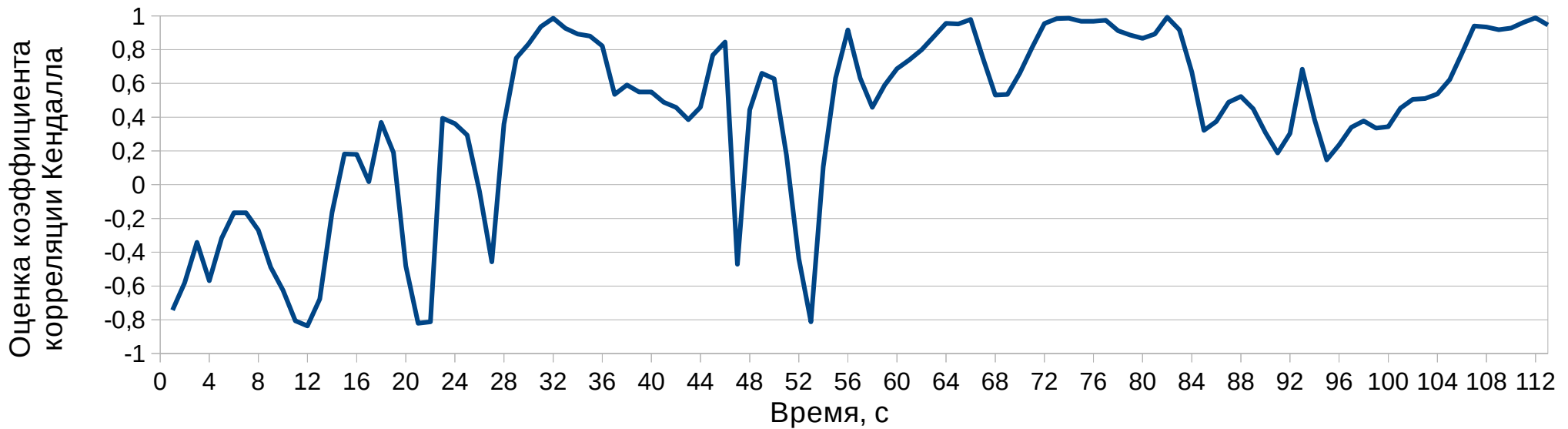


Спектр сингулярности для различных  $q$  восстановленного сигнала из  $Z_j(t)$  слагаемых для траектории АД

# Оценки меры связи ЛСК и АД



## Коэффициенты корреляции Пирсона для ЛСК и АД



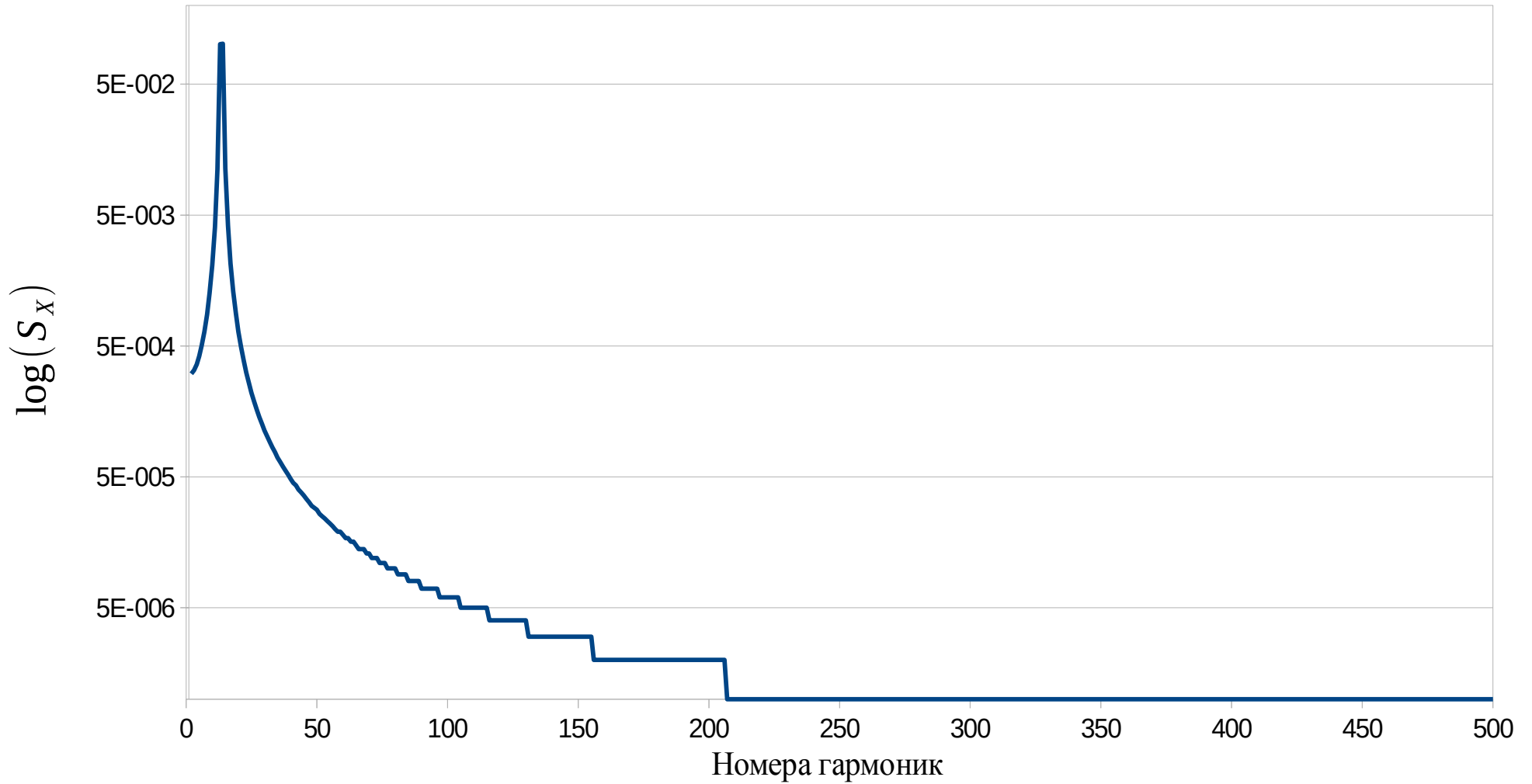
## Тау Кендалла для ЛСК и АД

# Результаты

1. Реализованы все алгоритмы, заявленные в списке поставленных задач
2. Получены оценки фрактальной размерности для нескольких десятков траекторий ЛСК и АД
3. По итогам доклада результатов этой работы в НИИ нейрохирургии им. проф. Поленова предложенный подход к изучению системы ауторегуляции (АМК) специалисты оценивают, как «новое перспективное научное направление»

**Спасибо за внимание!**

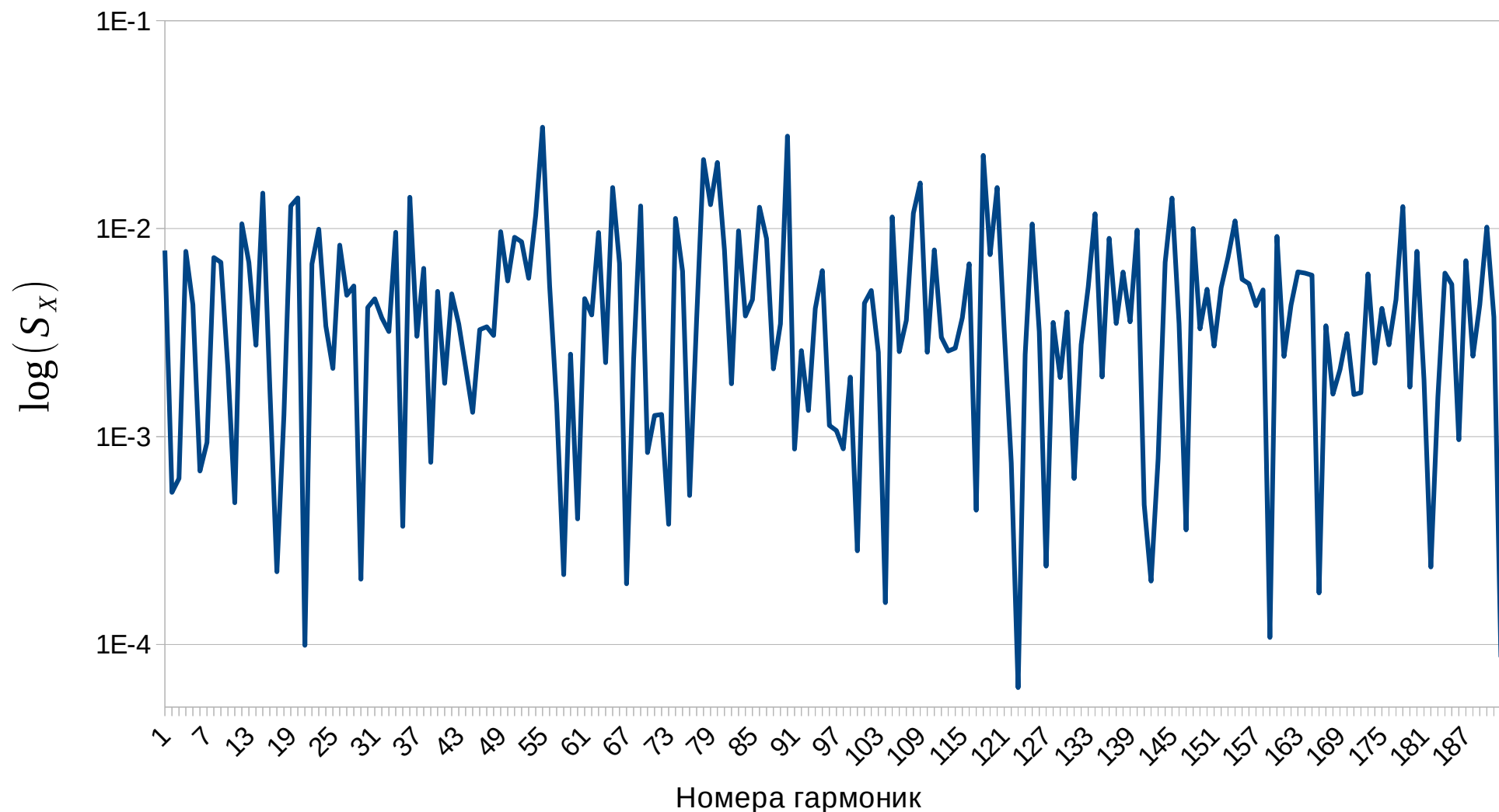
# Периодограмма детерминированного процесса



Периодограмма в логарифмическом масштабе для гармонического колебания



# Периодограмма белого шума



Периодограмма белого шума в логарифмическом масштабе

# Критерий Морана

$$M_n = - \sum_{i=1}^{n+1} \ln((n+1)D_i) \quad (9)$$

где

$$D_i = U_i - U_{i-1}, D_1 = U_1, D_{n+1} = 1 - U_n, (i=1, \dots, n+1)$$

# Размерность аттрактора

Размерность по Колмогорову-Хаусдорфу:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (10)$$

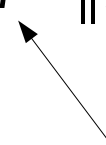
где  $M(\epsilon)$  минимальное число  $n$ -мерных шаров радиуса  $\epsilon$ , необходимых для покрытия аттрактора

**Метод Такенса:**

$$x_k = (q_k, q_{k+\tilde{\tau}}, \dots, q_{k+(n-1)\tilde{\tau}}) \quad (11)$$
$$k = 1, \dots, m \quad m = N - (n-1)\tilde{\tau}$$

# Размерность аттрактора

## Оценка корреляционного интеграла

$$C(r) = \frac{1}{m(m+1)/2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \Theta(r - \|x_i - x_j\|) \quad (12)$$


Если

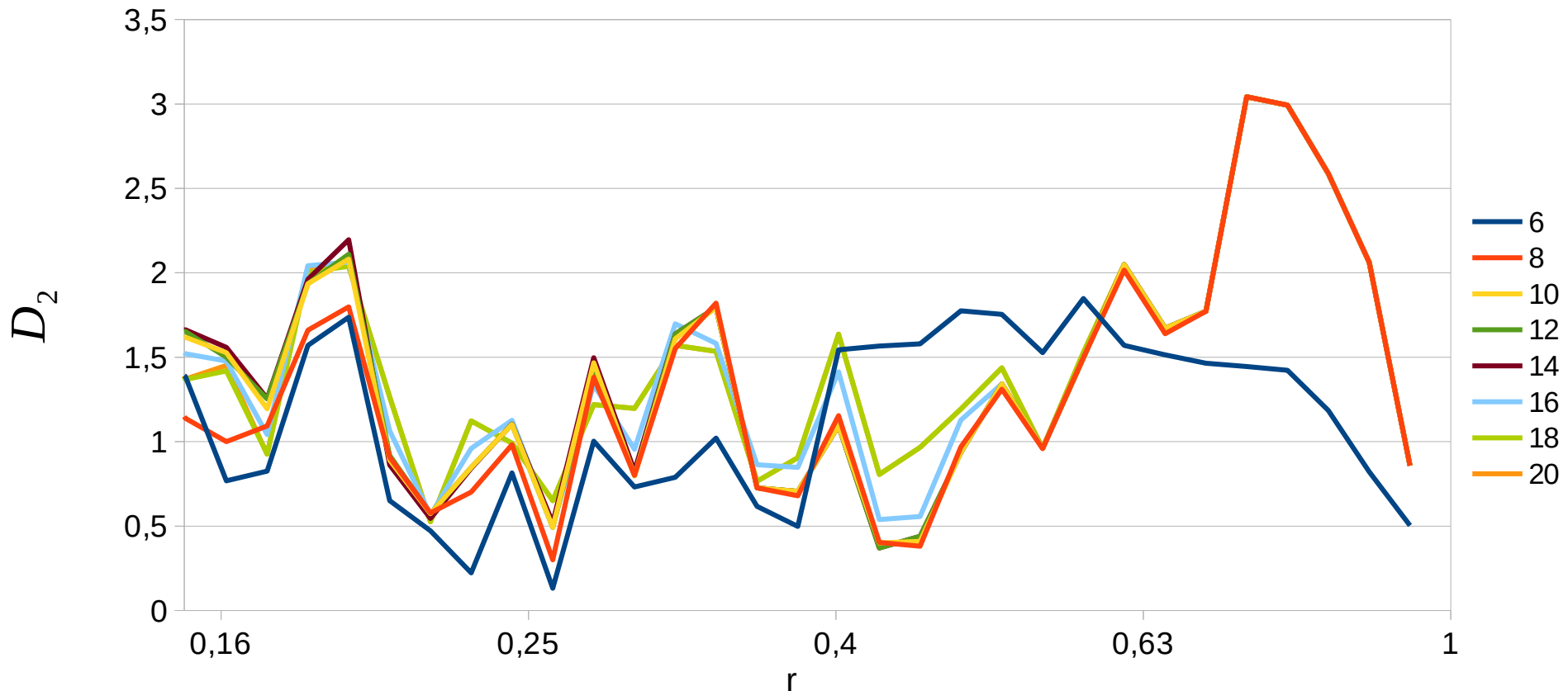
пороговое расстояние

$$C(r) \sim r^{D_2} \quad (13)$$

то  $D_2$  – искомая размерность аттрактора.

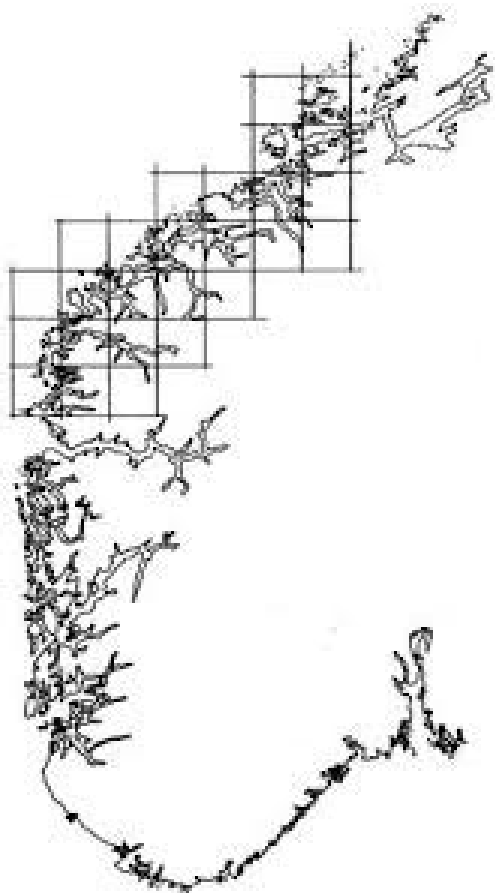
$$D_2 = \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (14)$$

# Оценки размерностей аттракторов у детерминированных слагаемых(2)



Оценки размерностей аттракторов, определяемых  $Z_j(t)$  гармониками

# Фрактальная размерность



$$p_i(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n_i(\epsilon)}{N(\epsilon)} \quad (15)$$

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q(\epsilon) \quad (16)$$

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (17)$$

$$\text{где } \tau(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (18)$$

# Оценка экспоненты Херста

$$sd(L) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{t=1}^L (w(t) - \bar{w}(L))^2} \quad (19)$$

$$W(\tau, L) = \sum_{t=1}^{\tau} (w(t) - \bar{w}(L)) \quad (20)$$

Размах накопившегося отклонения:

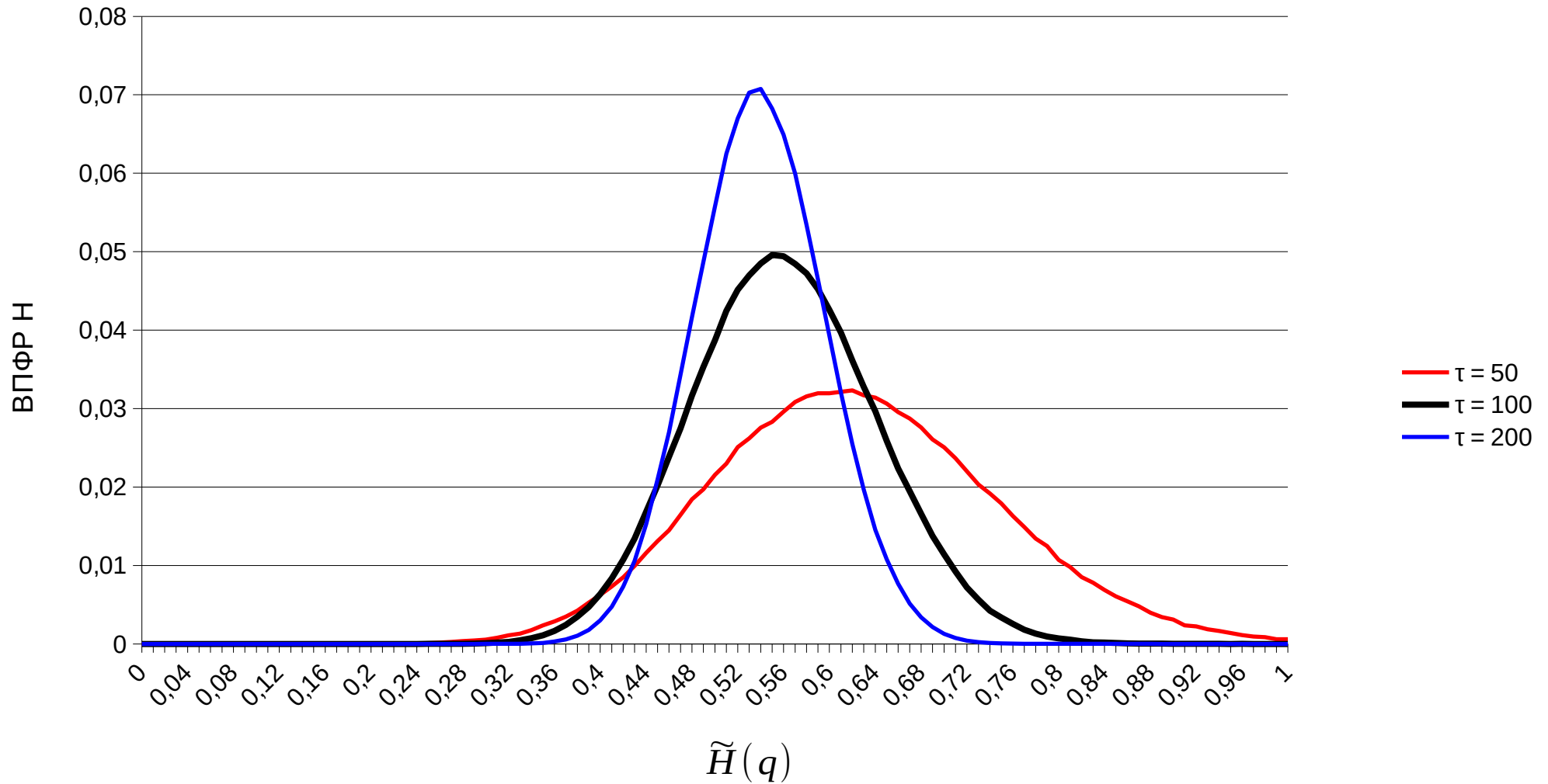
$$R(\tau) = \max(W(t, \tau)) - \min(W(t, \tau)) \quad (21)$$

Эмпирическое соотношение

$$\frac{R(\tau)}{S(\tau)} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (22)$$

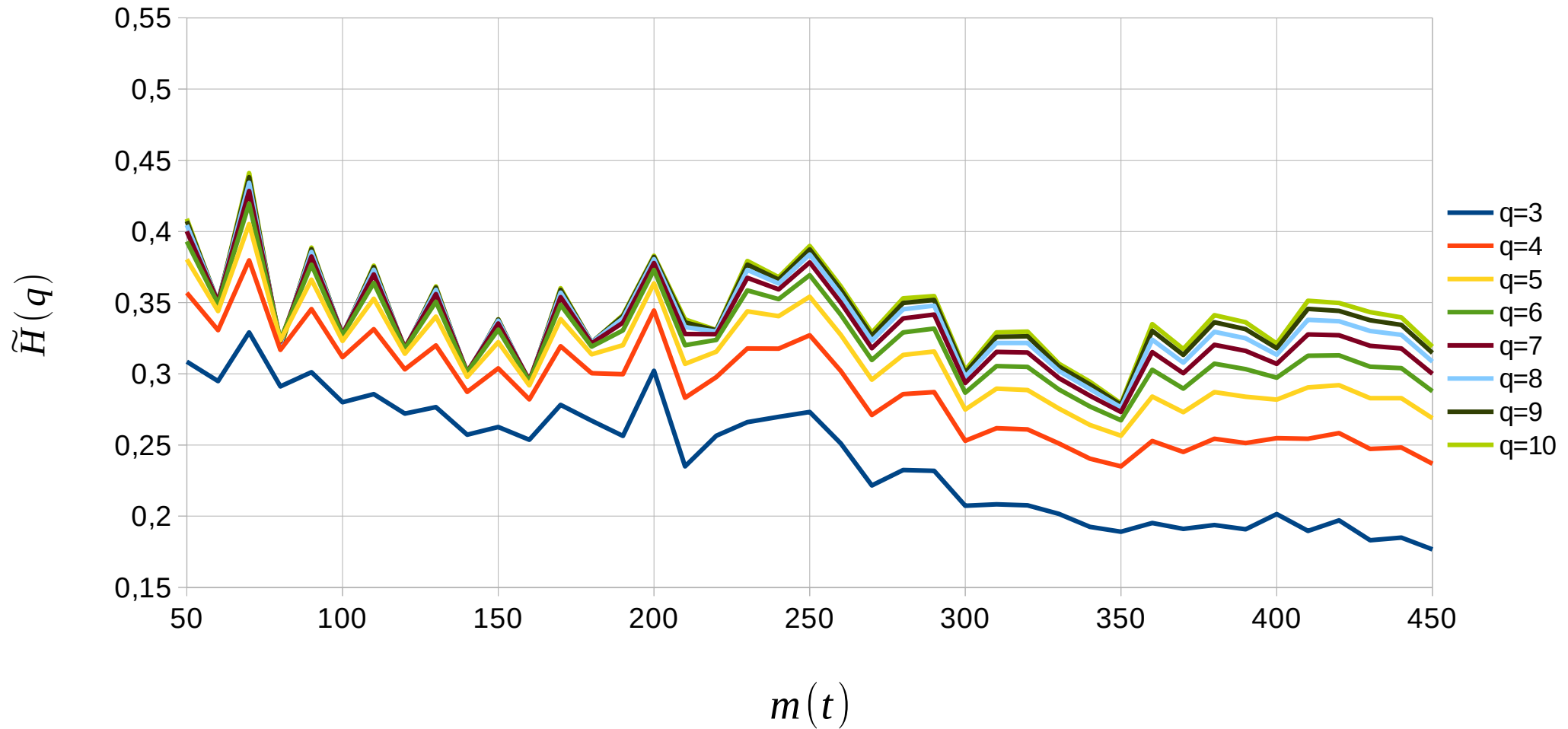
H – экспонента Херста

# Распределение оценки\* обобщенной фрактальной размерности для модельных реализаций броуновского движения





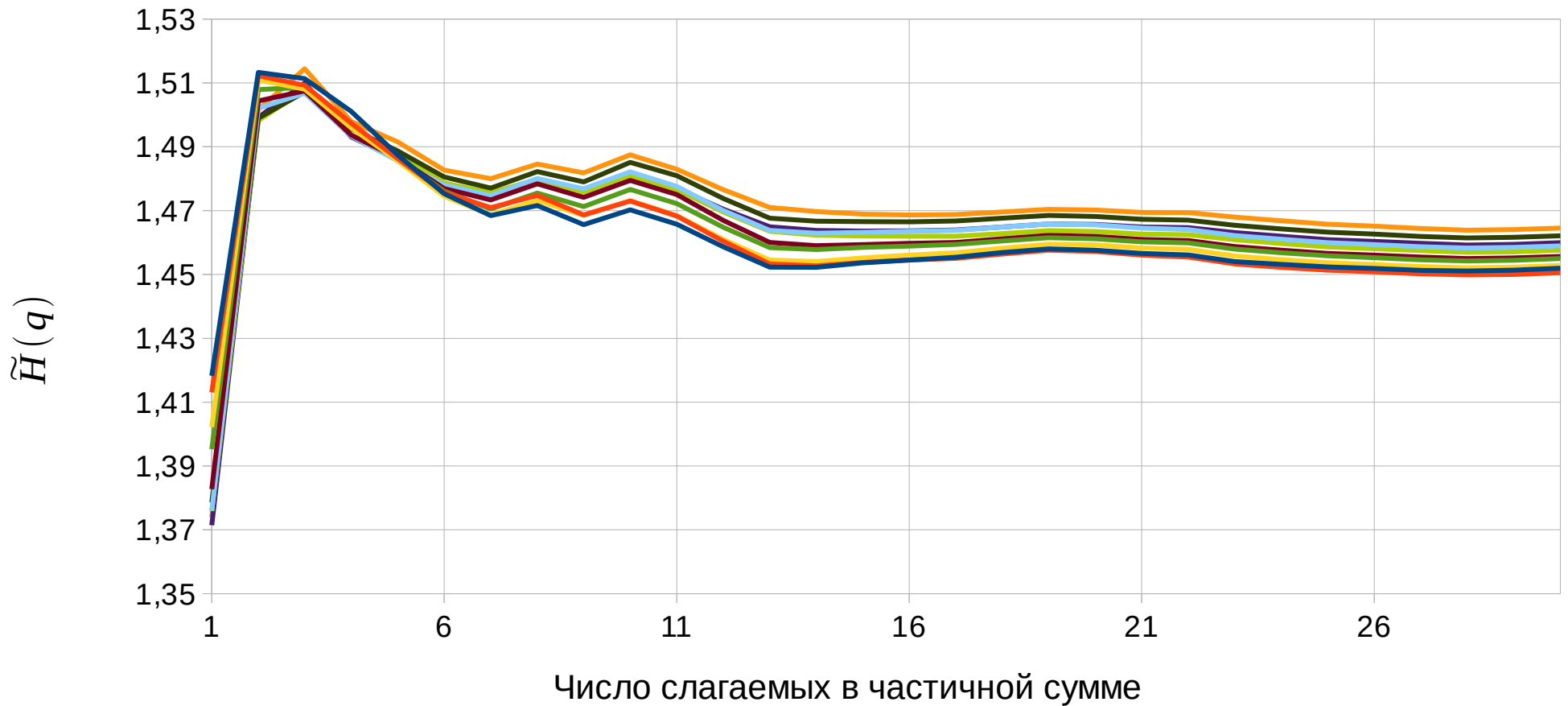
# Обобщенная фрактальная размерность для белого шума



# Фрактальная размерность

для частичных сумм  $S_{\sum_j z_j}$

$$G_{MFDFA} \left( \sum_1^p G_{DF} (G_{FFT} (X(t))) \right) : X(t) \rightarrow \tilde{H}(t, p), \quad p < m(t)$$



# Число детерминированных слагаемых в различные моменты времени

