

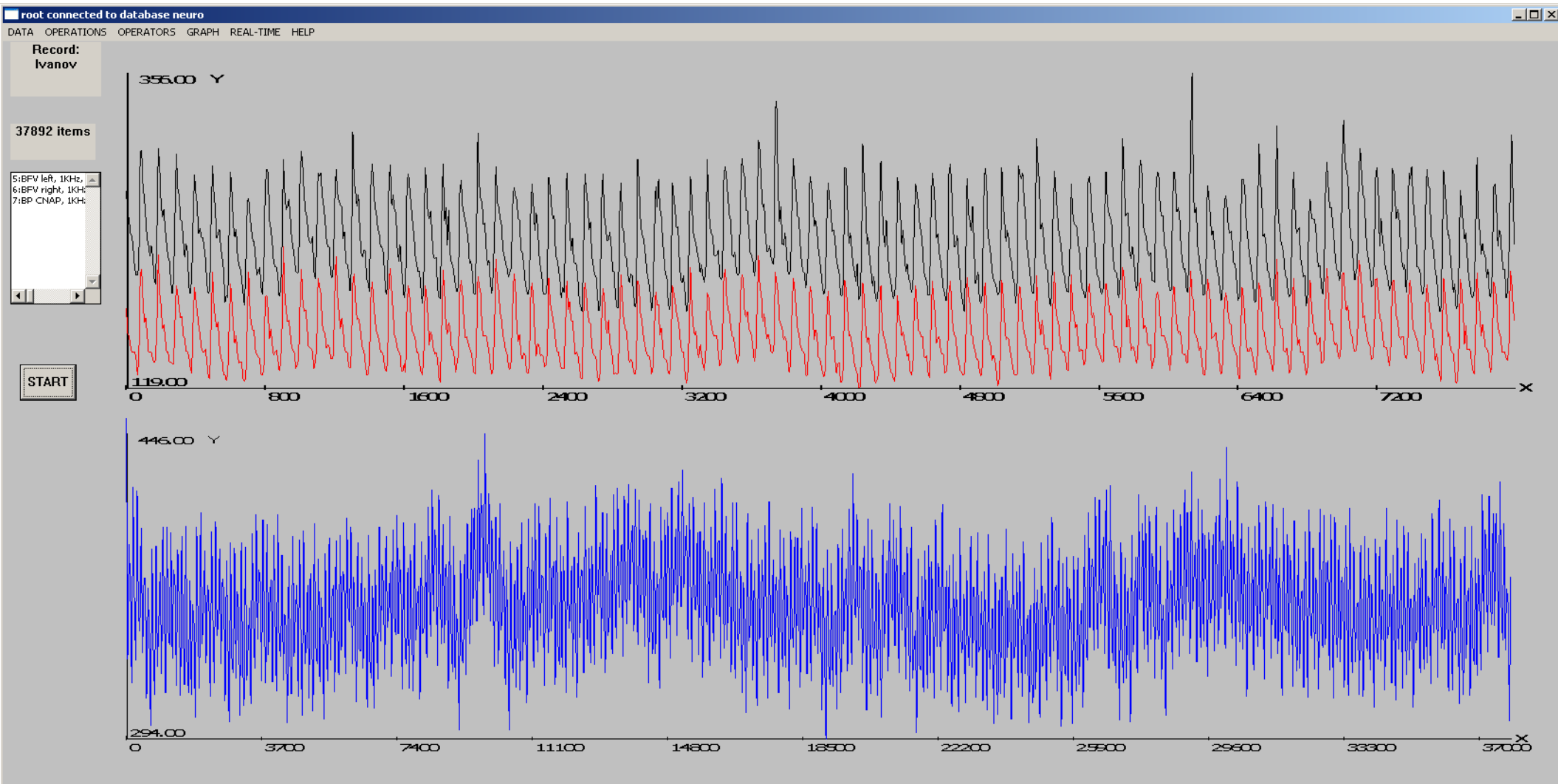
Изучение оценок фрактальных
размерностей детерминированных
слагаемых аддитивных моделей
процессов, регистрируемых в
транскраниальной доплерографии

Выполнил: Кутузов А.В.

Научный руководитель: Иванков А.А.

Объект исследования(1)

Сигналы, интерпретируемые как линейная скорость кровотока (ЛСК*) и артериальное давление(АД)



(*) регистрируемые ультразвуковыми датчиками Multi Dop X в ходе доплерографического исследования кровообращения

Объект исследования(2)

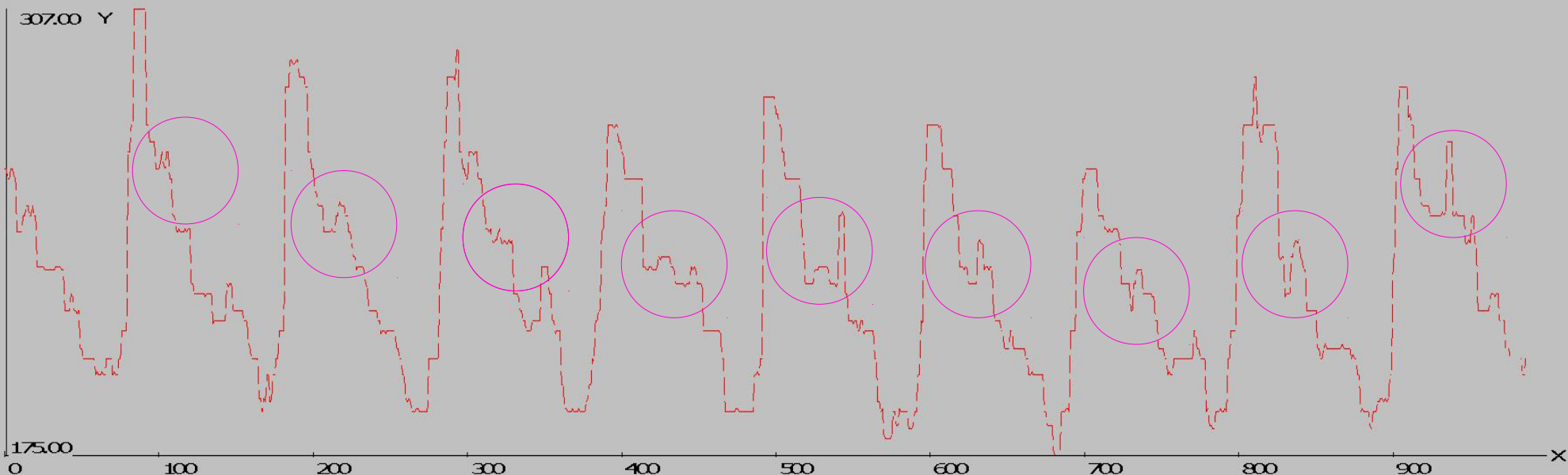
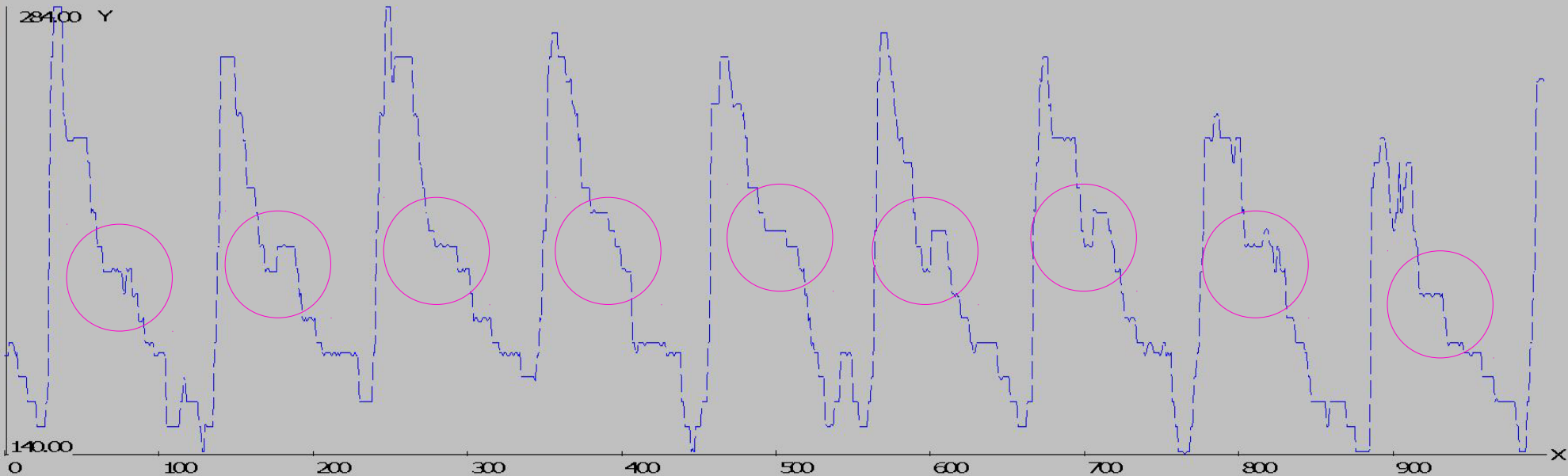
FILE OPERATIONS ONLINE OPERATORS GRAPH HELP

Record:
Ivanov

1000 items

1:BPV left, 1KHz,
5:BPV left, 1KHz,

START



Модель(1)

$$X(t) = \sum_Y + \sum_Z \quad (1)$$

$$\text{где } \sum_Y = \sum_i^{k(t)} Y_i(t), \quad \sum_Z = \sum_j^{m(t)} Z_j(t)$$

$X(t)$ – регистрируемый сигнал

$Z_j(t)$ – траектории квазипериодических детерминированных процессов

$Y_i(t)$ – траектории случайных процессов

$m(t)$ – число детерминированных слагаемых

$k(t)$ – число стохастических слагаемых

$n = k(t) + m(t)$ – длина траектории $X(t)$

Модель(2)

$$Z(t): MesZ(t+T+\delta_Z(t)) = MesZ(t) + \varepsilon_Z(t) \quad (2)$$

$$Y(t): MesY(t+\delta_Y(t)) = MesY(t) + \varepsilon_Y(t) \quad (3)$$

$MesK(\dots)$ – случайные меры, где $K = Z, Y$

T – длина периода той компоненты спектра, которая вносит основной вклад в его спектральную плотность

$\delta_K(\cdot) \sim o(\cdot)$ – отклонение длительности конкретного периода от его оценки в среднем

$\varepsilon_K(t) \sim o(MesK(t))$ – отклонение оценки функции распределения ординаты процесса $K(t)$ от его оценки в среднем

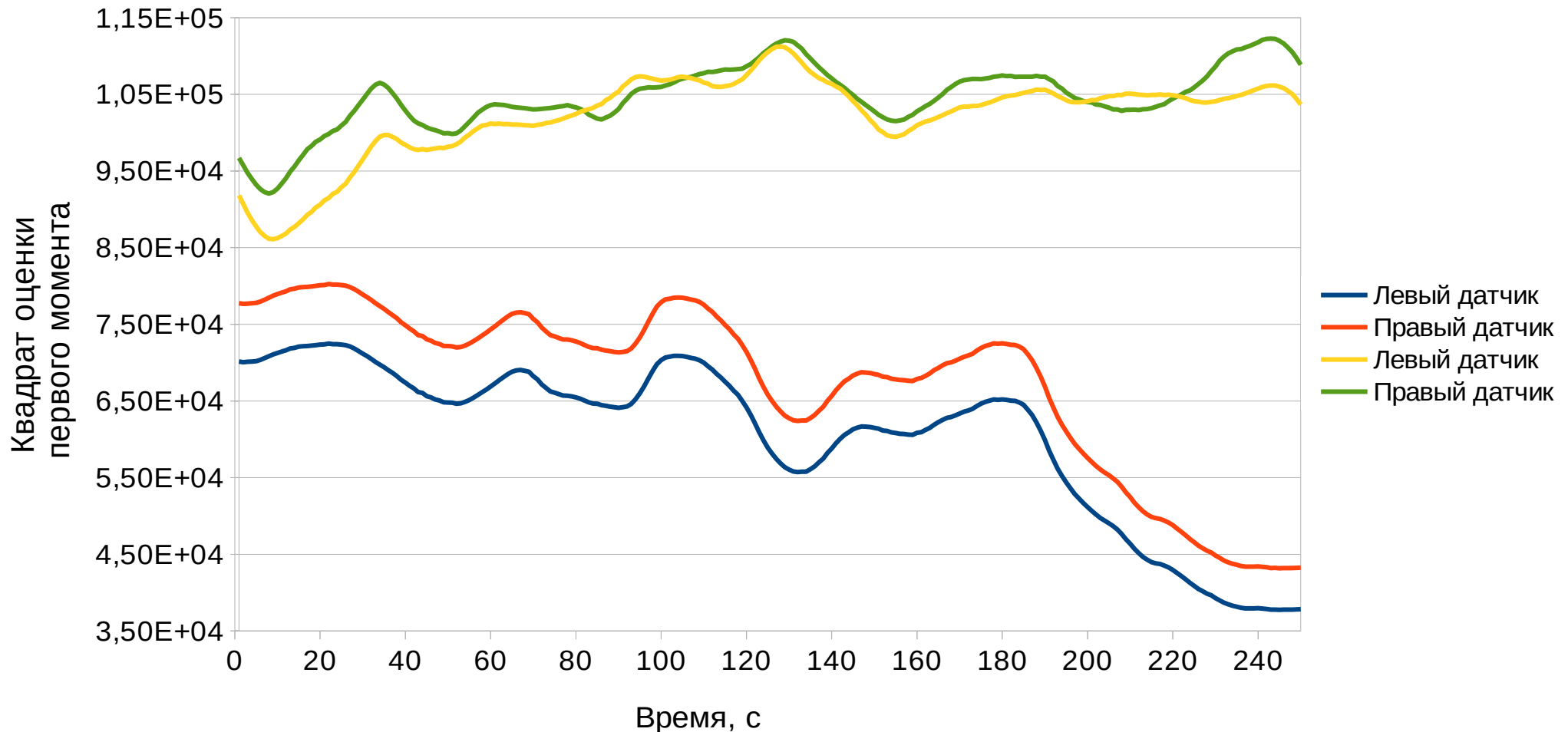
Цель работы

Анализ математических моделей, используемых в медико-биологических исследованиях ЛСК и АД

Конкретные задачи

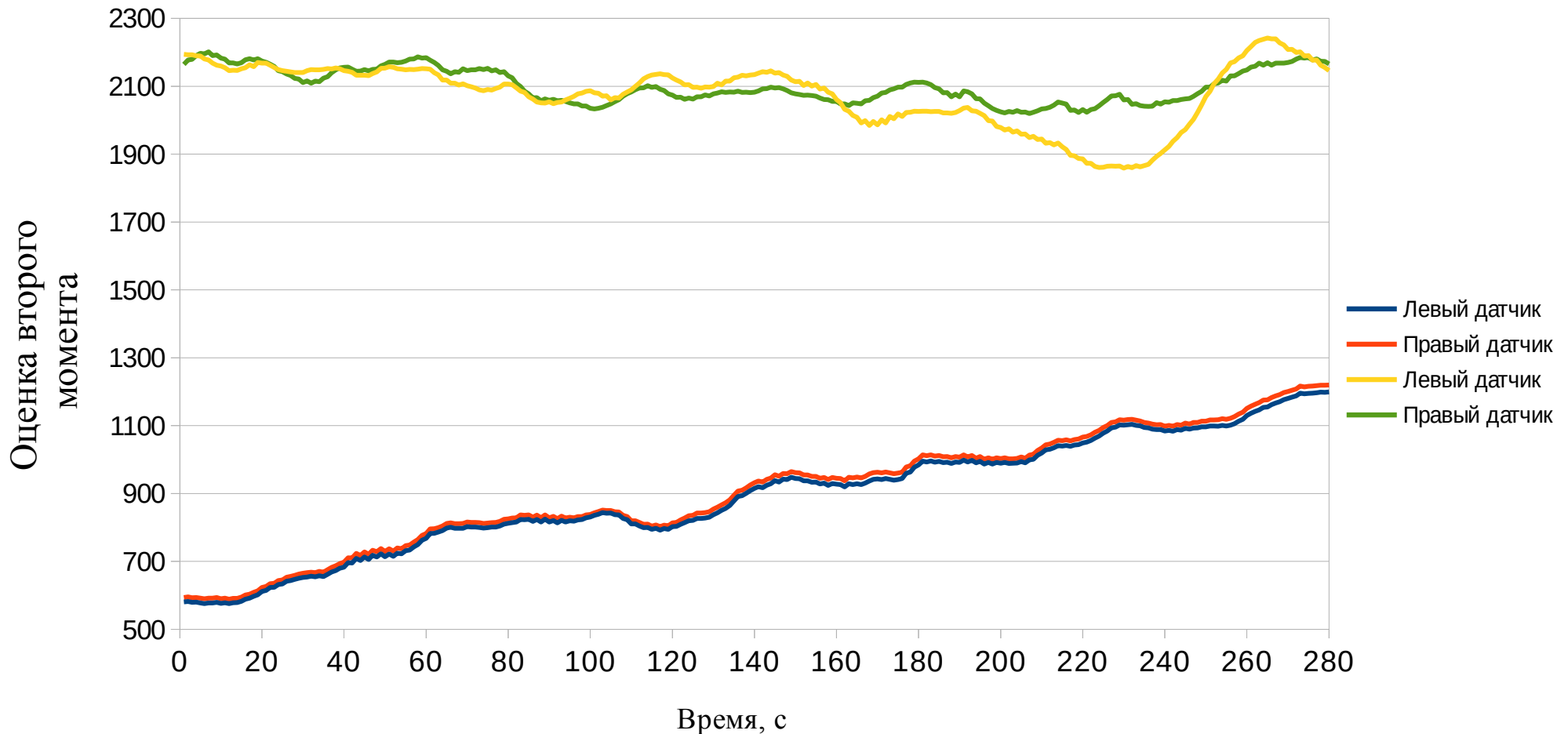
1. Реализовать алгоритмы идентификации слагаемых \sum_Y, \sum_Z
 - 1.1 Идентификация стохастических слагаемых в (1)
 - 1.2 Построение оценок корреляционной и фрактальной размерностей \sum_Y, \sum_Z
2. Реализовать алгоритмы идентификации квазистационарных участков исследуемых процессов
3. Оценить меру связи ЛСК и АД на квазистационарных участках процессов

Нестационарность исследуемых процессов (1)



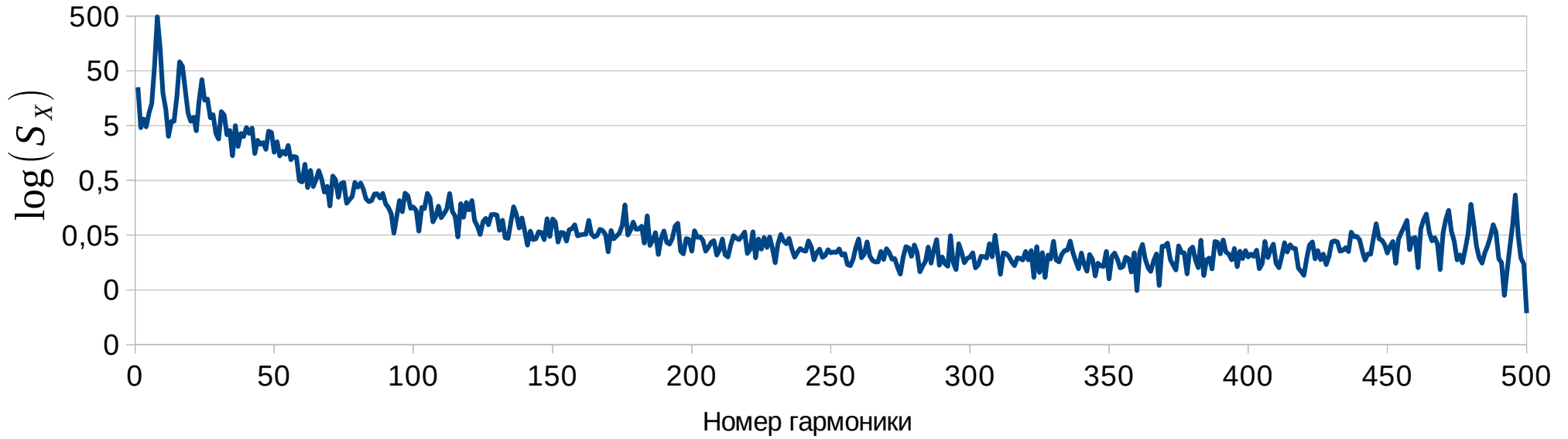
Оценки первого момента исследуемых процессов
(полученные для одного и того же пациента с интервалом в полгода)

Нестационарность исследуемых процессов (2)

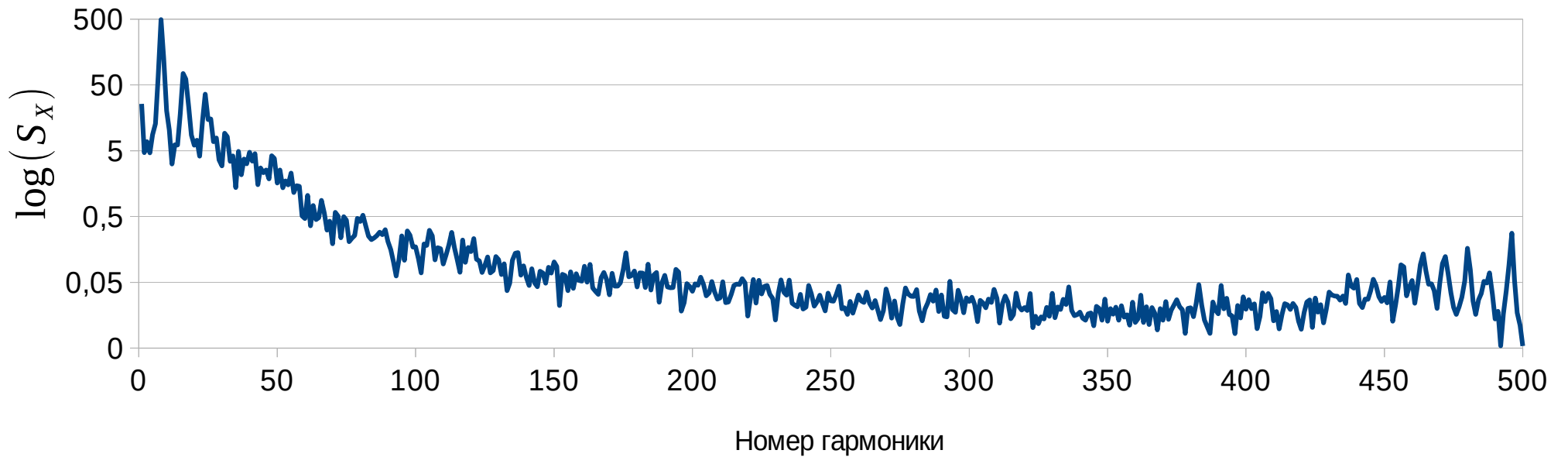


Оценки второго момента исследуемых процессов
(полученные для одного и того же пациента с интервалом в полгода)

Оценки спектральной плотности S_X



Периодограмма сигнала, зарегистрированного правым датчиком



Периодограмма сигнала, зарегистрированного левым датчиком

Идентификация Σ_Y (1)

Упорядочиваем множество оценок спектральной плотности:

$$\{S_X^i\}, i \in \{1, (n/2)^*\}, S_X^i > S_X^{i+1} \quad (4)$$

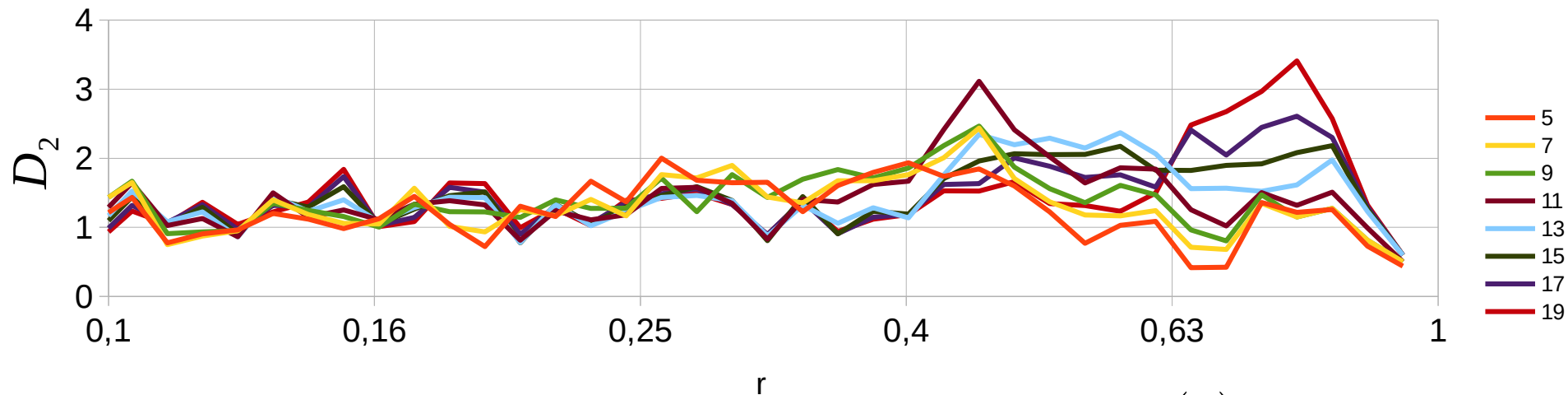
Пока отклоняется нулевая гипотеза:

$$H_0: \{S_X^i\} \sim U[a, b] \quad (5)$$

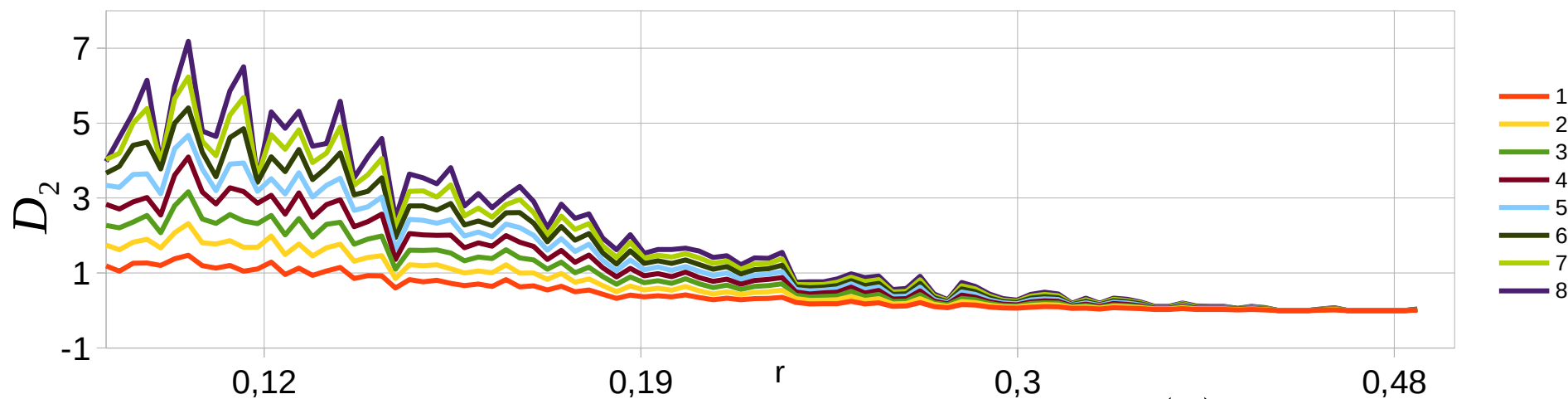
удаляем элемент с индексом $i=1$

* выделяем целую часть

Оценки размерностей аттракторов у детерминированных слагаемых(2)



Оценки размерностей аттракторов, определяемых $Z_j(t)$ гармониками



Оценки размерностей аттракторов, определяемых $Z_j(t)$ гармониками

MFDFA

Пусть $w(t)$ – анализируемый ряд, стандартное отклонение:

$$F_k(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=k\tau+1}^{(k+1)\tau} (w(t) - tr(t))^2} \quad (6)$$

$tr(t)$ полиномиальный тренд на интервале размером τ

Среднее значение по $\frac{L}{\tau}$ интервалам:

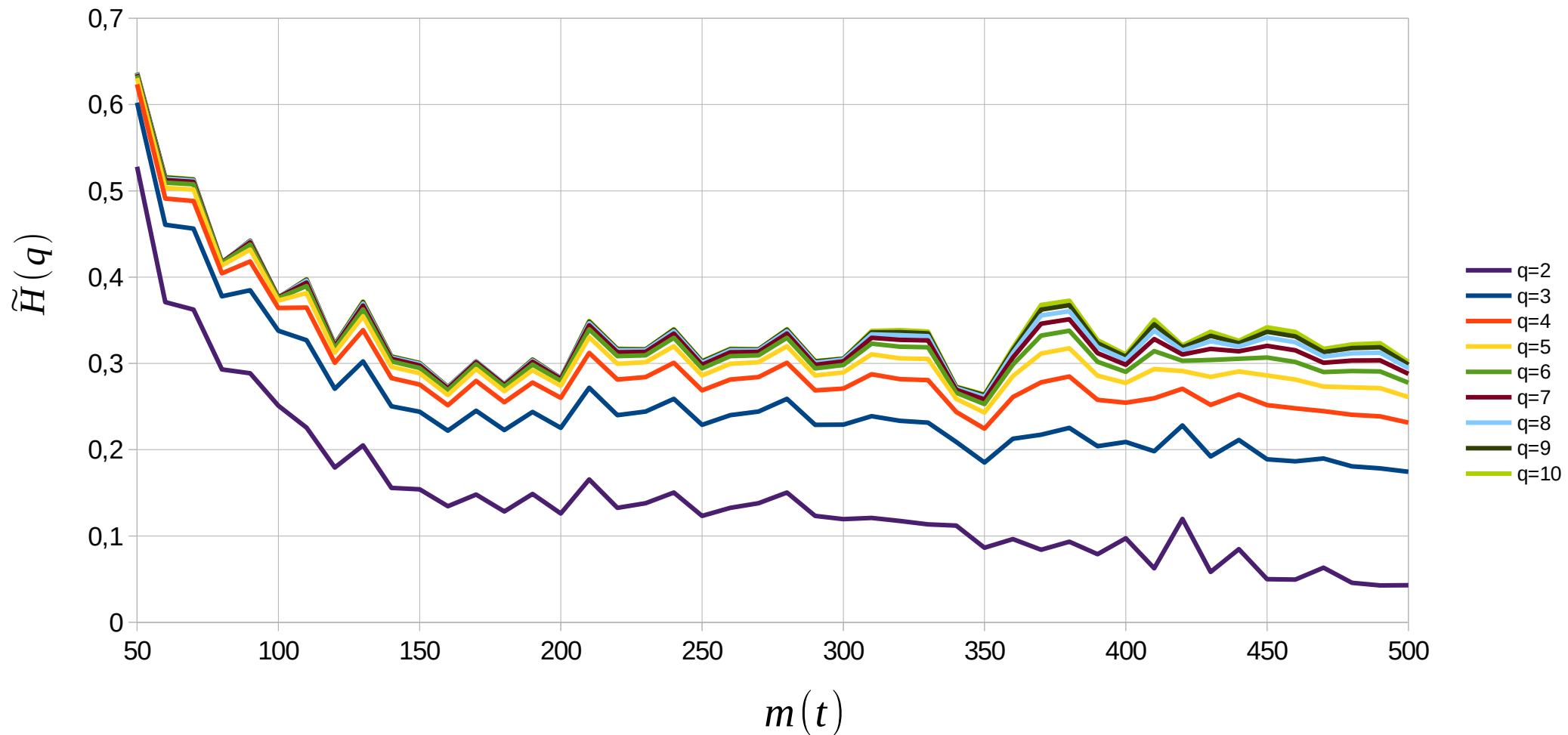
$$\langle F_q^2(\tau) \rangle = \left(\frac{\tau}{L} \sum_{k=0}^{\frac{L}{\tau}-1} F_k^{\frac{q}{2}}(\tau) \right)^{\frac{1}{q}} \quad (7)$$

Оценка обобщенной фрактальной размерности $\tilde{H}(q)$

$$\sqrt{\langle F_q^2(\tau) \rangle} \sim \tau^{\tilde{H}(q)} \quad (8)$$

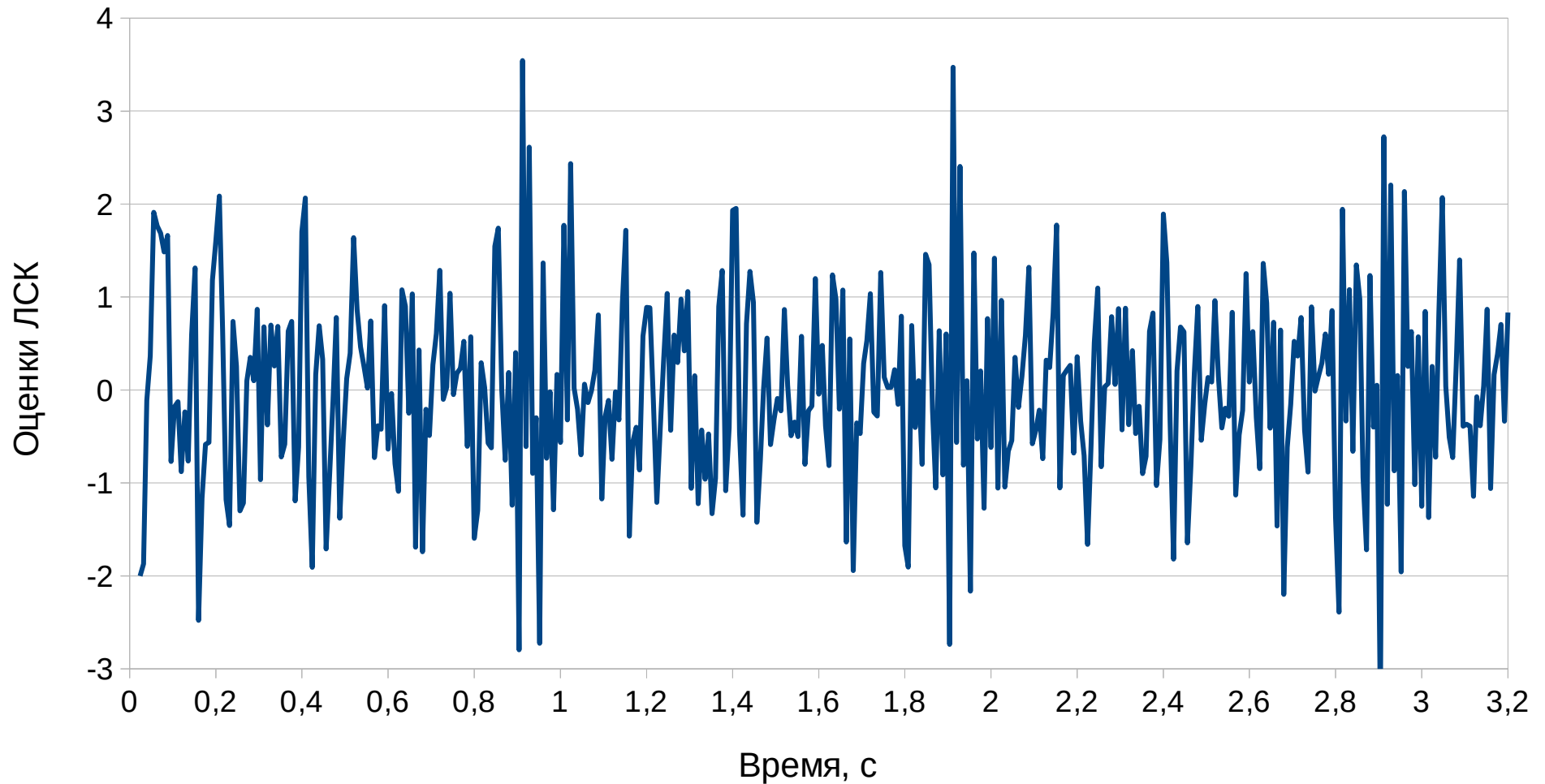
Обобщенная фрактальная размерность для Σ_Y

$$G_{MFDEFA(q)}(G_{SF}(G_{FFT}(X(t)))) : X(t) \rightarrow \tilde{H}(q)$$



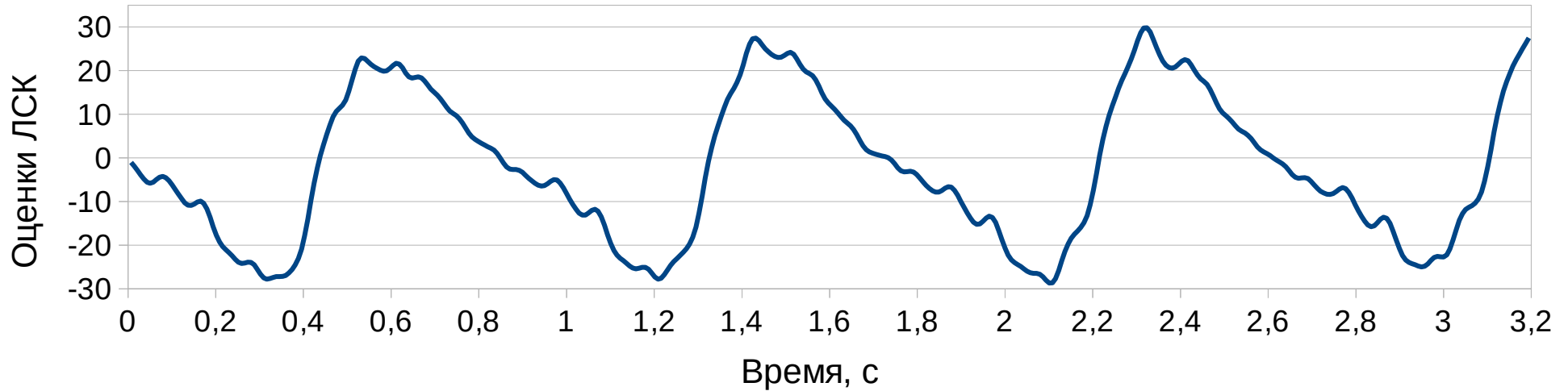
Восстановленный сигнал для $\{Y_i(t)\}$ слагаемых

$$G_{INVFFT} (G_{SF} (G_{FFT} (X(t)))) : X(t) \rightarrow Y(t)$$



Восстановленный сигнал для $\{Z_j(t)\}$ слагаемых и исходный сигнал

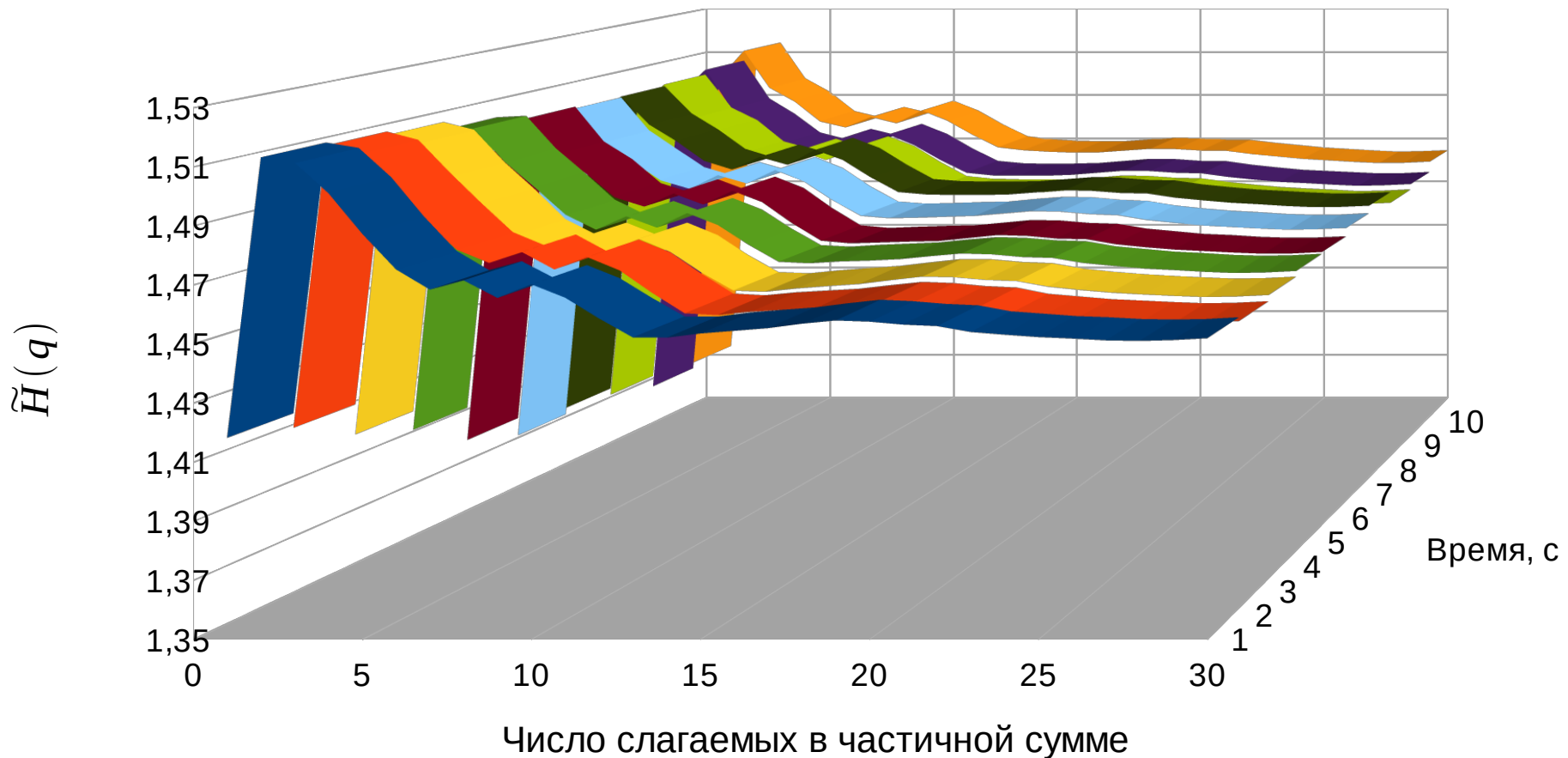
$$G_{INVFFT}(G_{DF}(G_{FFT}(X(t)))): X(t) \rightarrow Z(t)$$



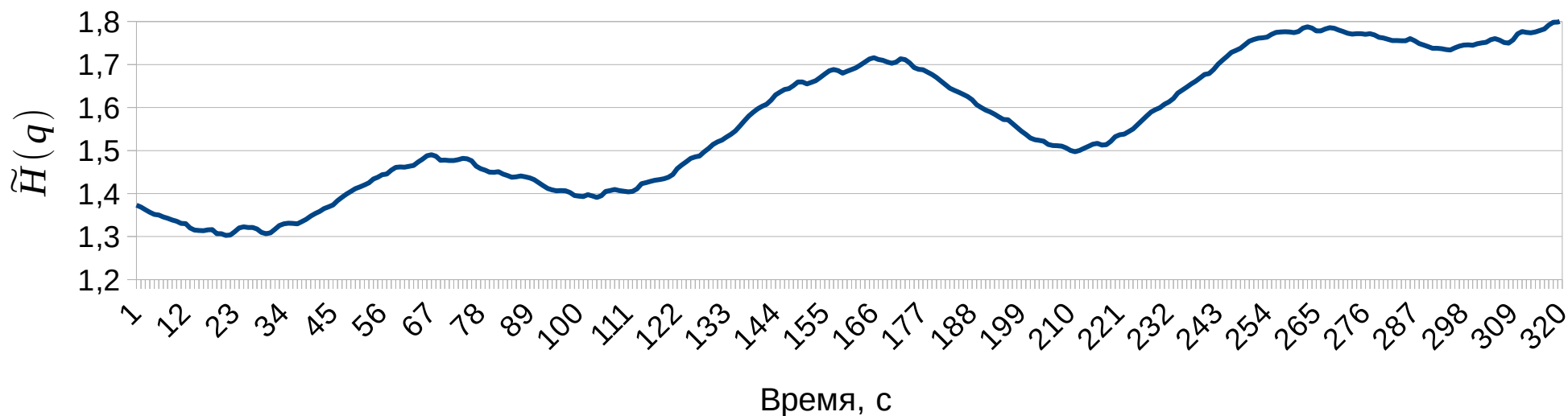
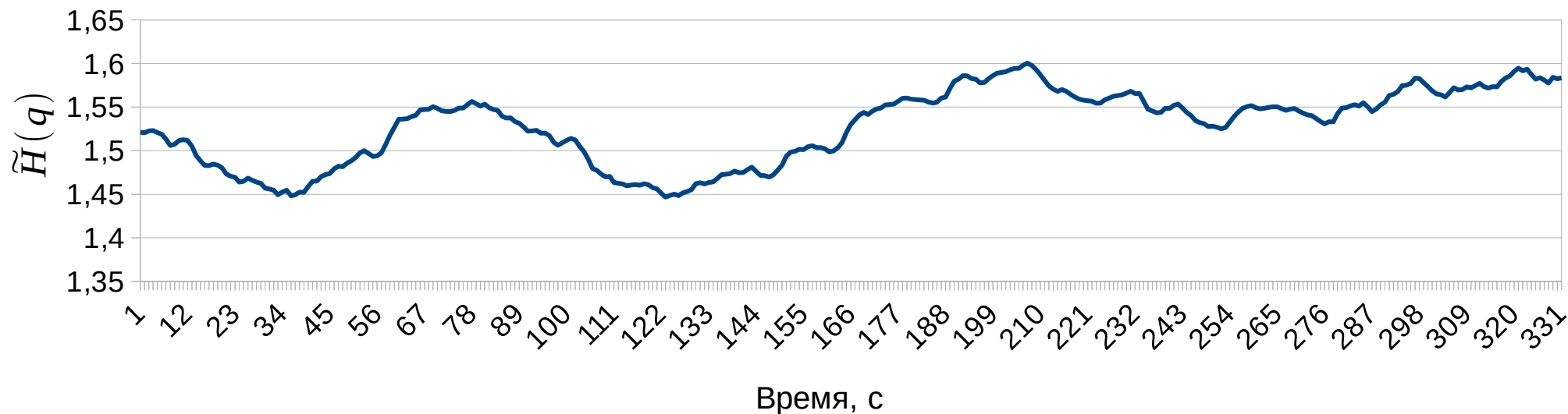
Фрактальная размерность

для частичных сумм $S_{\sum_j z_j}$

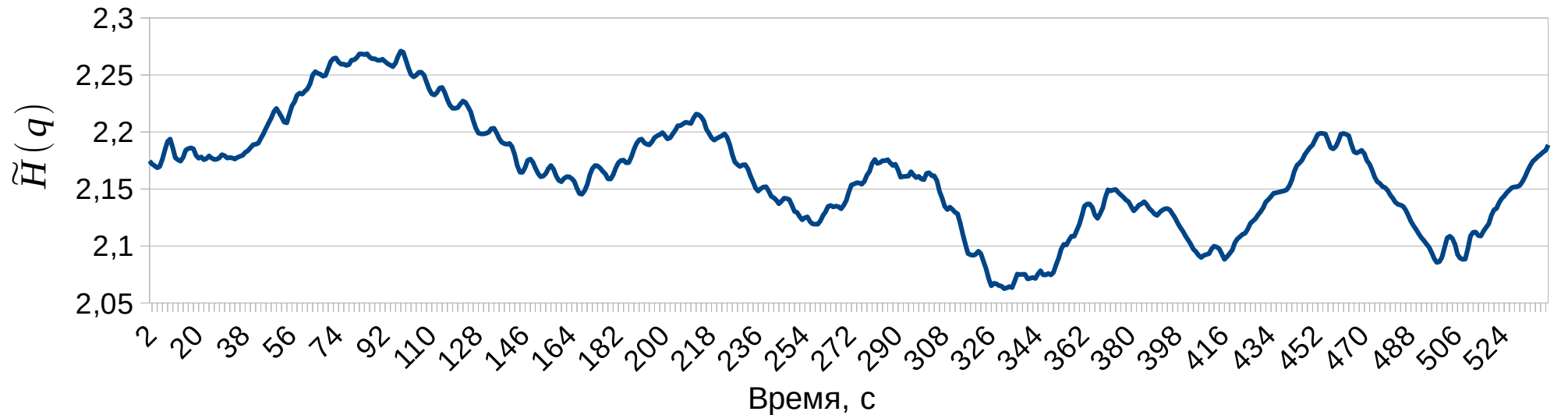
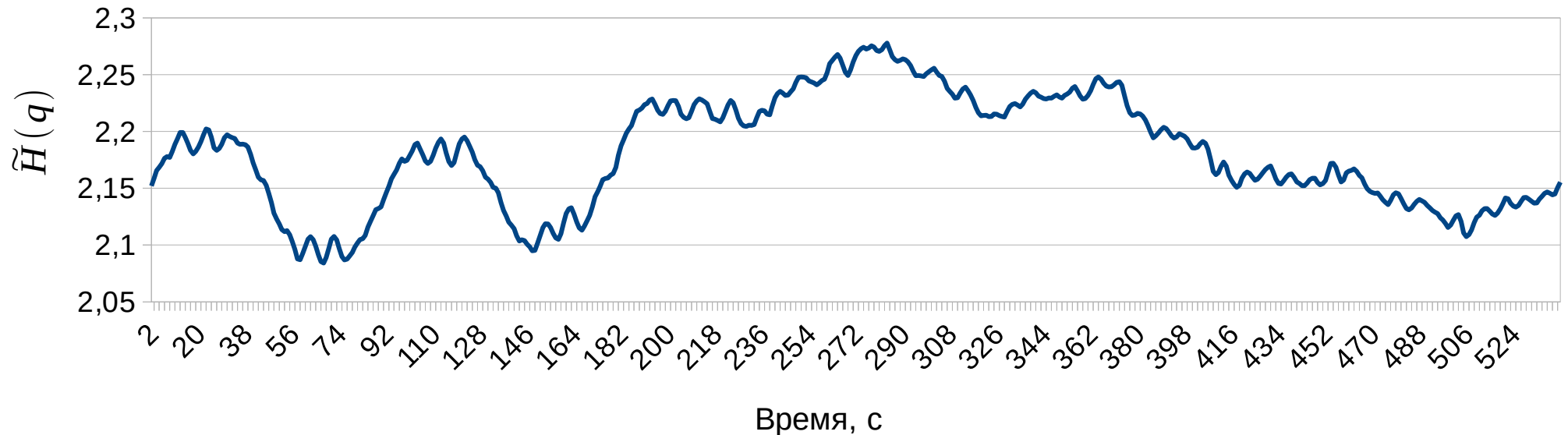
$$G_{MFDFA} \left(\sum_1^p G_{DF} (G_{FFT} (X(t))) \right) : X(t) \rightarrow \tilde{H}(t, p), \quad p < m(t)$$



Фрактальная размерность для суммы из 25 гармоник (пациент с патологией)

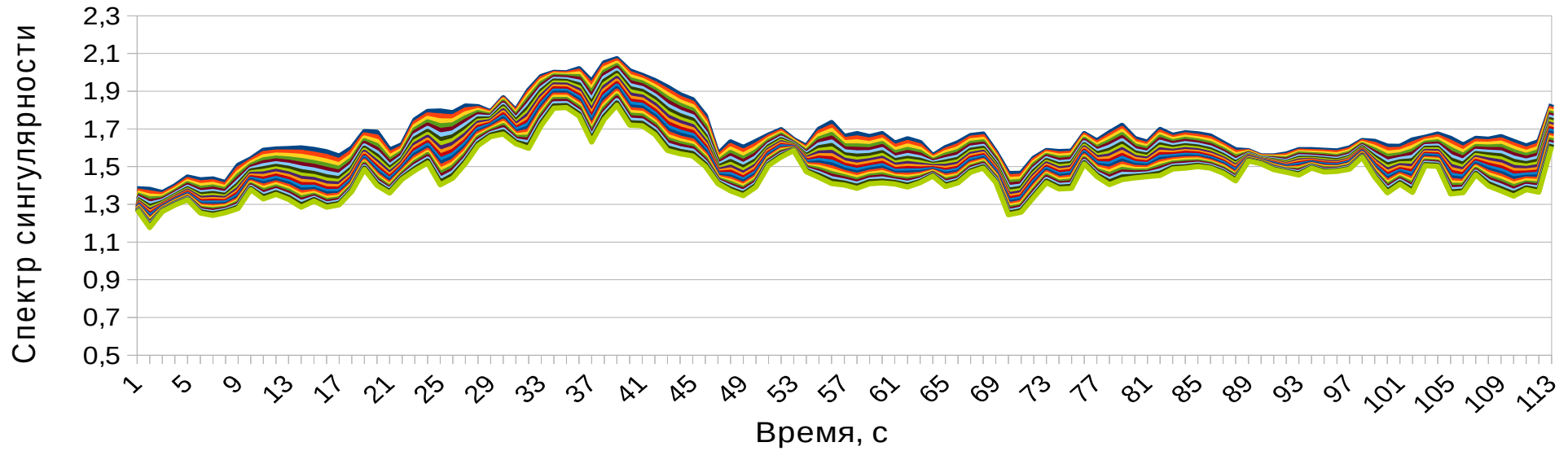


Фрактальная размерность для суммы из 25 гармоник (здоровый доброволец)

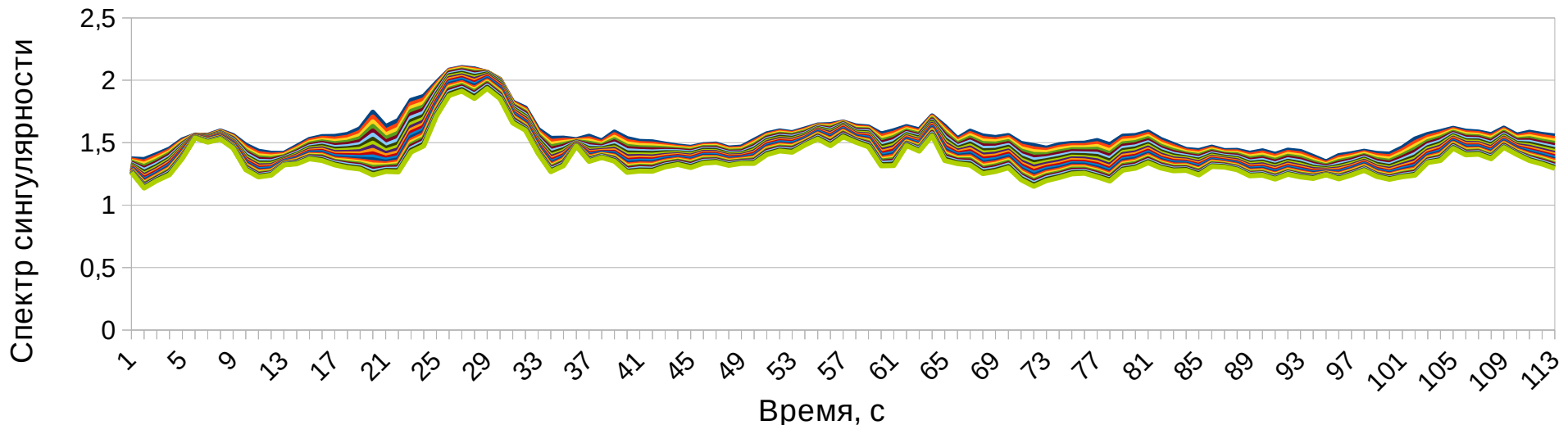


Поиск квазистационарных участков

$$G_{SPSIN(q)}(G_{DF}(G_{FFT}(X(t)))) : X(t) \rightarrow f(t, q)$$

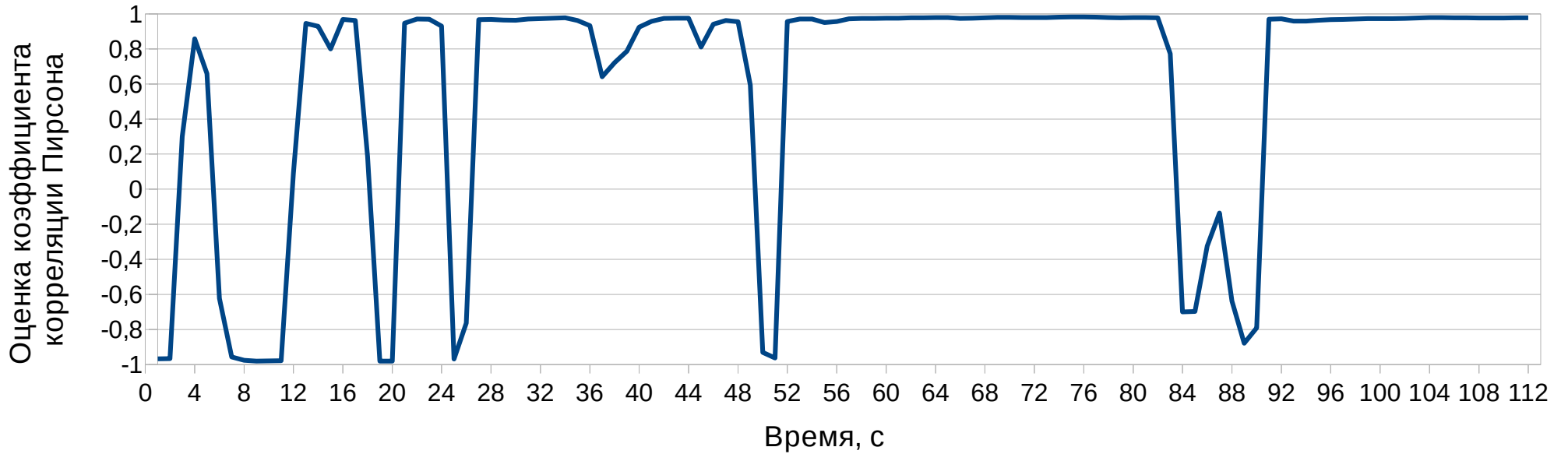


Спектр сингулярности для различных q восстановленного сигнала из $Z_j(t)$ слагаемых для траектории ЛСК

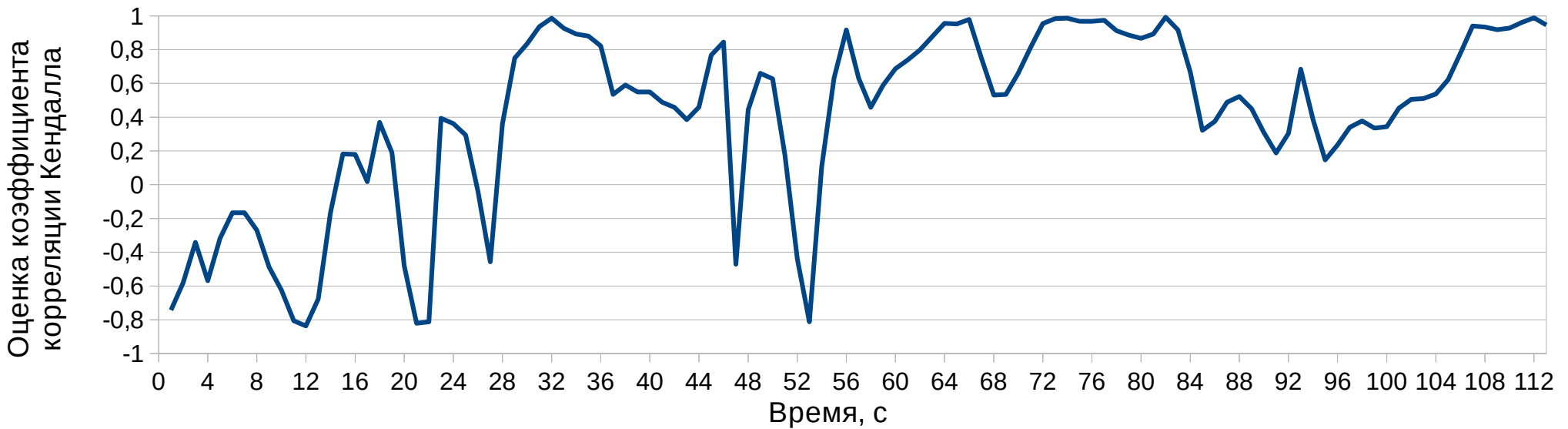


Спектр сингулярности для различных q восстановленного сигнала из $Z_j(t)$ слагаемых для траектории АД

Оценки меры связи ЛСК и АД



Коэффициенты корреляции Пирсона для ЛСК и АД



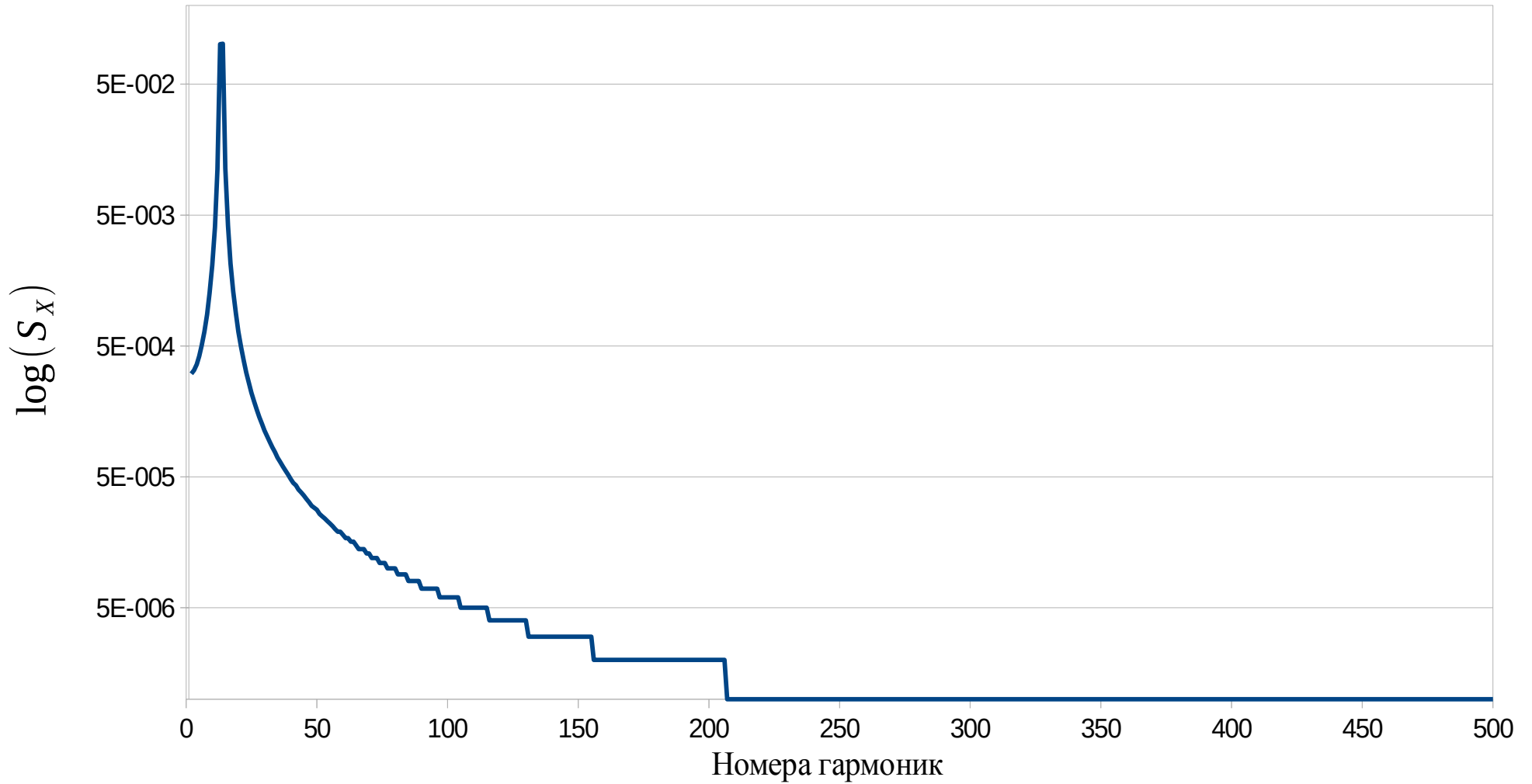
Тау Кендалла для ЛСК и АД

Результаты

1. Реализованы все алгоритмы, заявленные в списке поставленных задач
2. Получены оценки фрактальной размерности для нескольких десятков траекторий ЛСК и АД
3. По итогам доклада результатов этой работы в НИИ нейрохирургии им. проф. Поленова предложенный подход к изучению системы ауторегуляции (АМК) специалисты оценивают, как «новое перспективное научное направление»

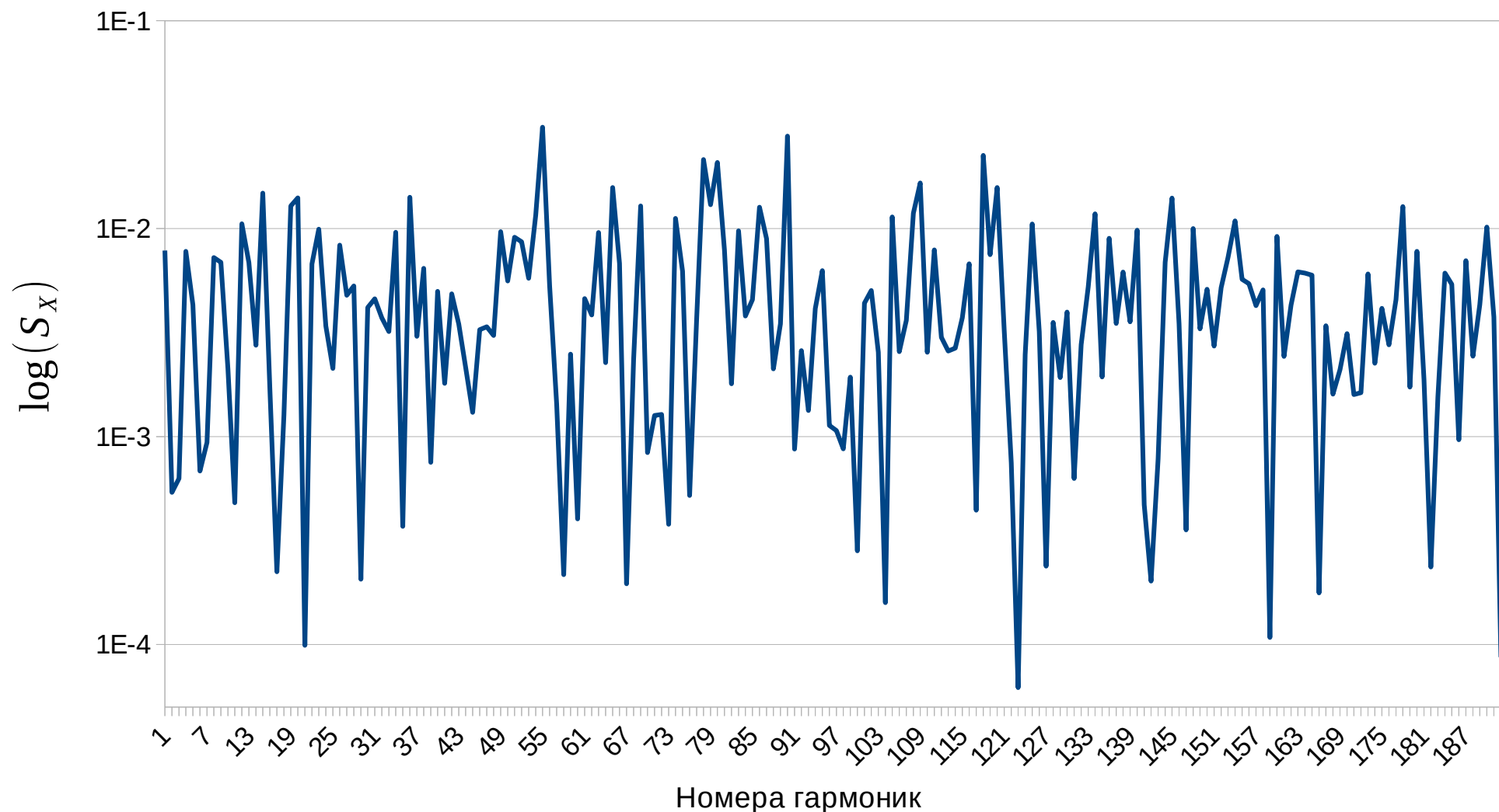
Спасибо за внимание!

Периодограмма детерминированного процесса



Периодограмма в логарифмическом масштабе для гармонического колебания

Периодограмма белого шума



Периодограмма белого шума в логарифмическом масштабе

Критерий Морана

$$M_n = - \sum_{i=1}^{n+1} \ln((n+1)D_i) \quad (9)$$

где

$$D_i = U_i - U_{i-1}, D_1 = U_1, D_{n+1} = 1 - U_n, (i=1, \dots, n+1)$$

Размерность аттрактора

Размерность по Колмогорову-Хаусдорфу:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (10)$$

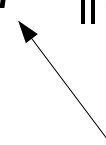
где $M(\epsilon)$ минимальное число n -мерных шаров радиуса ϵ , необходимых для покрытия аттрактора

Метод Такенса:

$$x_k = (q_k, q_{k+\tilde{\tau}}, \dots, q_{k+(n-1)\tilde{\tau}}) \quad (11)$$
$$k = 1, \dots, m \quad m = N - (n-1)\tilde{\tau}$$

Размерность аттрактора

Оценка корреляционного интеграла

$$C(r) = \frac{1}{m(m+1)/2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \Theta(r - \|x_i - x_j\|) \quad (12)$$


Если

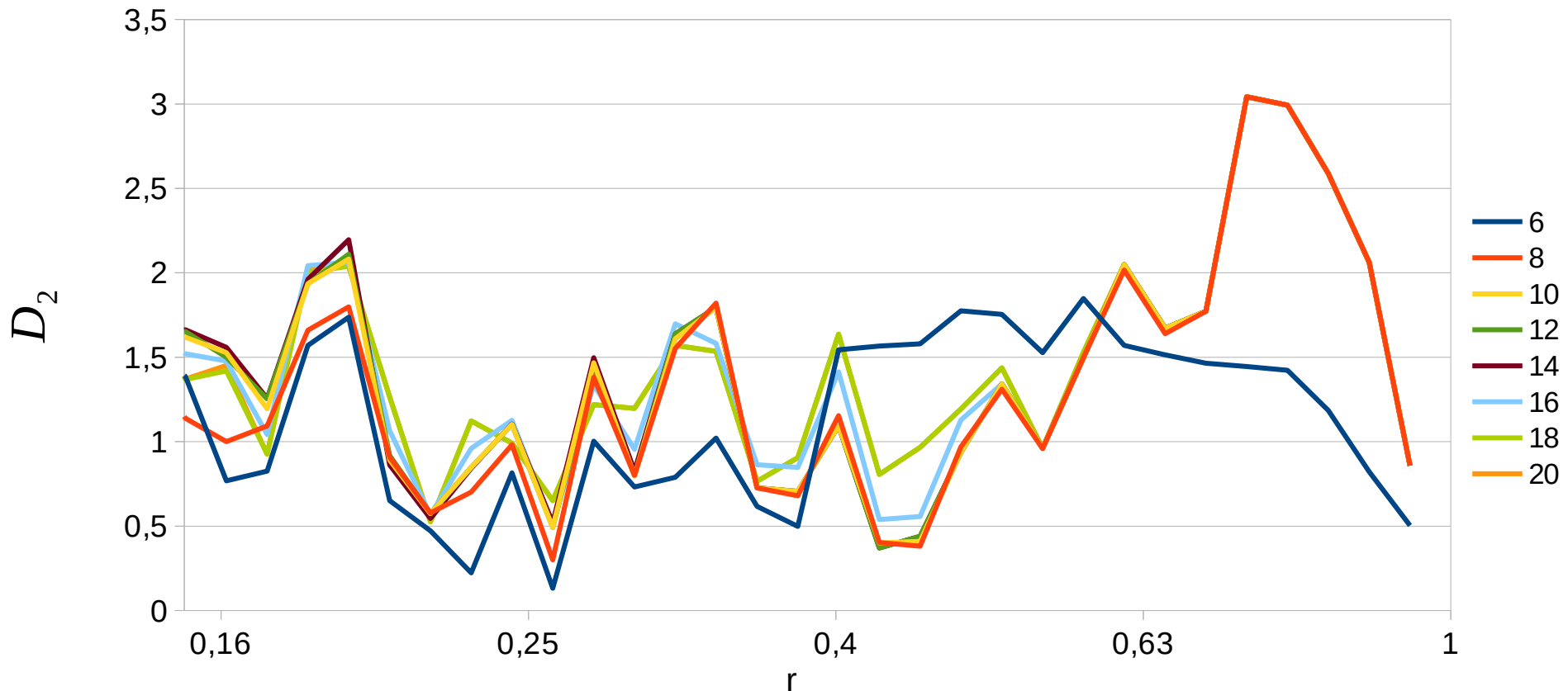
пороговое расстояние

$$C(r) \sim r^{D_2} \quad (13)$$

то D_2 – искомая размерность аттрактора.

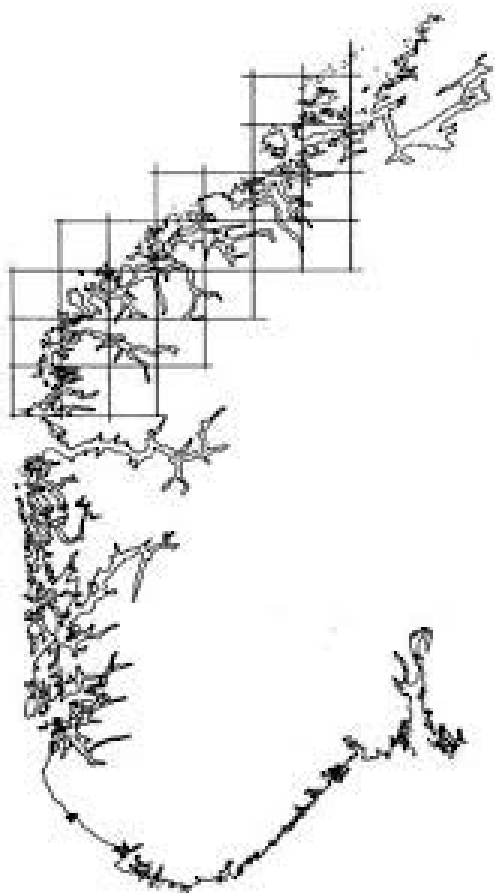
$$D_2 = \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (14)$$

Оценки размерностей аттракторов у детерминированных слагаемых(2)



Оценки размерностей аттракторов, определяемых $Z_j(t)$ гармониками

Фрактальная размерность



$$p_i(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n_i(\epsilon)}{N(\epsilon)} \quad (15)$$

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q(\epsilon) \quad (16)$$

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (17)$$

$$\text{где } \tau(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (18)$$

Оценка экспоненты Херста

$$sd(L) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{t=1}^L (w(t) - \bar{w}(L))^2} \quad (19)$$

$$W(\tau, L) = \sum_{t=1}^{\tau} (w(t) - \bar{w}(L)) \quad (20)$$

Размах накопившегося отклонения:

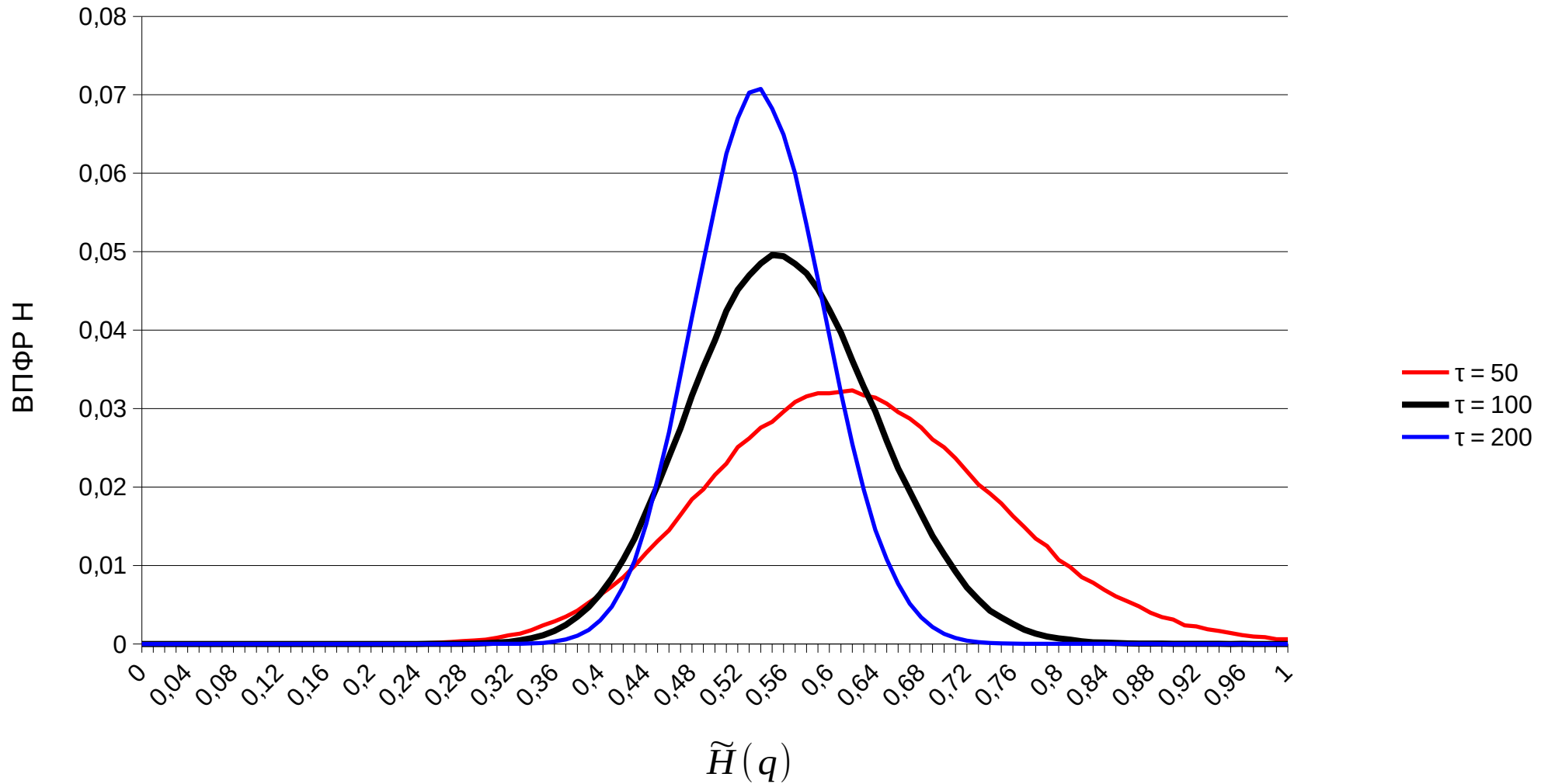
$$R(\tau) = \max(W(t, \tau)) - \min(W(t, \tau)) \quad (21)$$

Эмпирическое соотношение

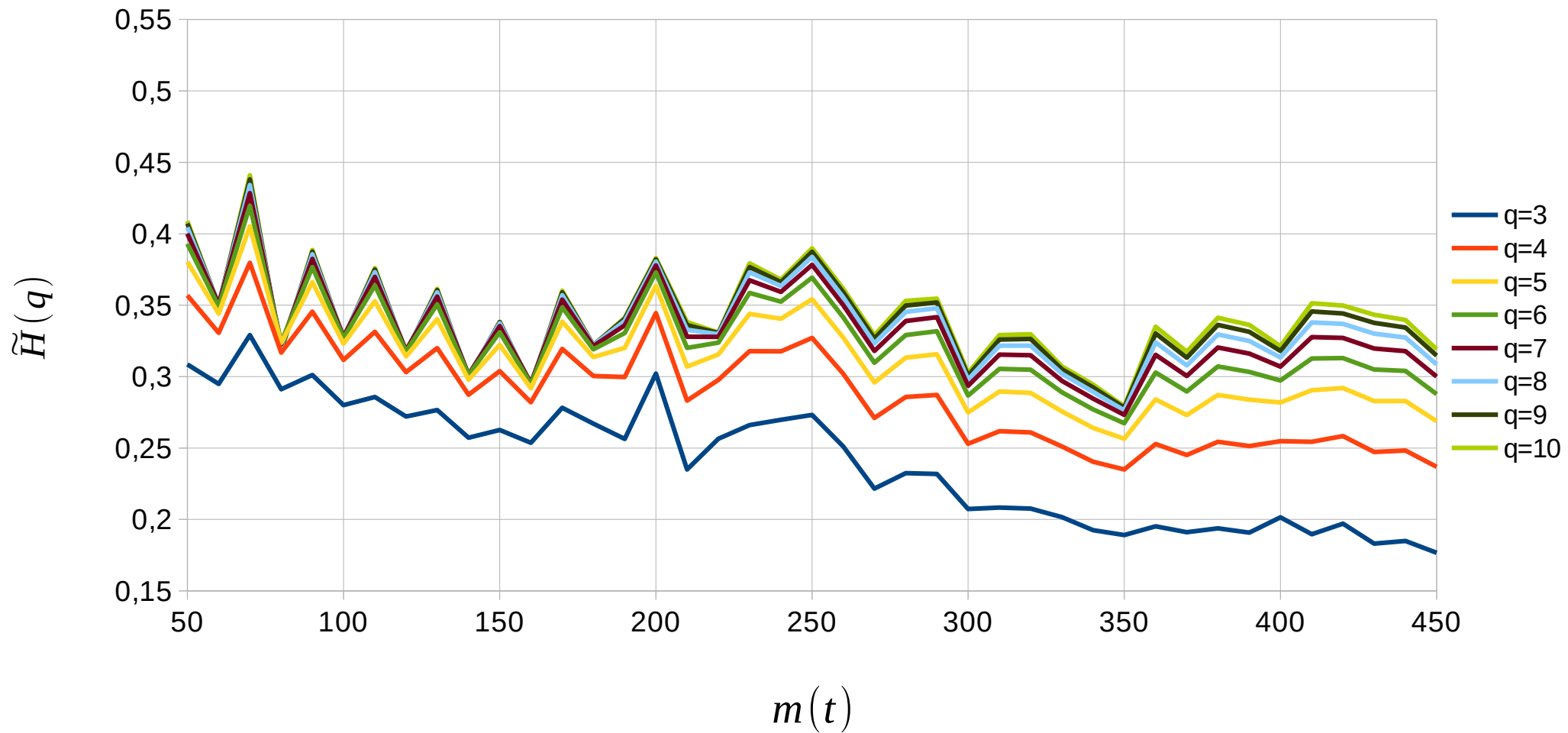
$$\frac{R(\tau)}{S(\tau)} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (22)$$

H – экспонента Херста

Распределение оценки* обобщенной фрактальной размерности для модельных реализаций броуновского движения



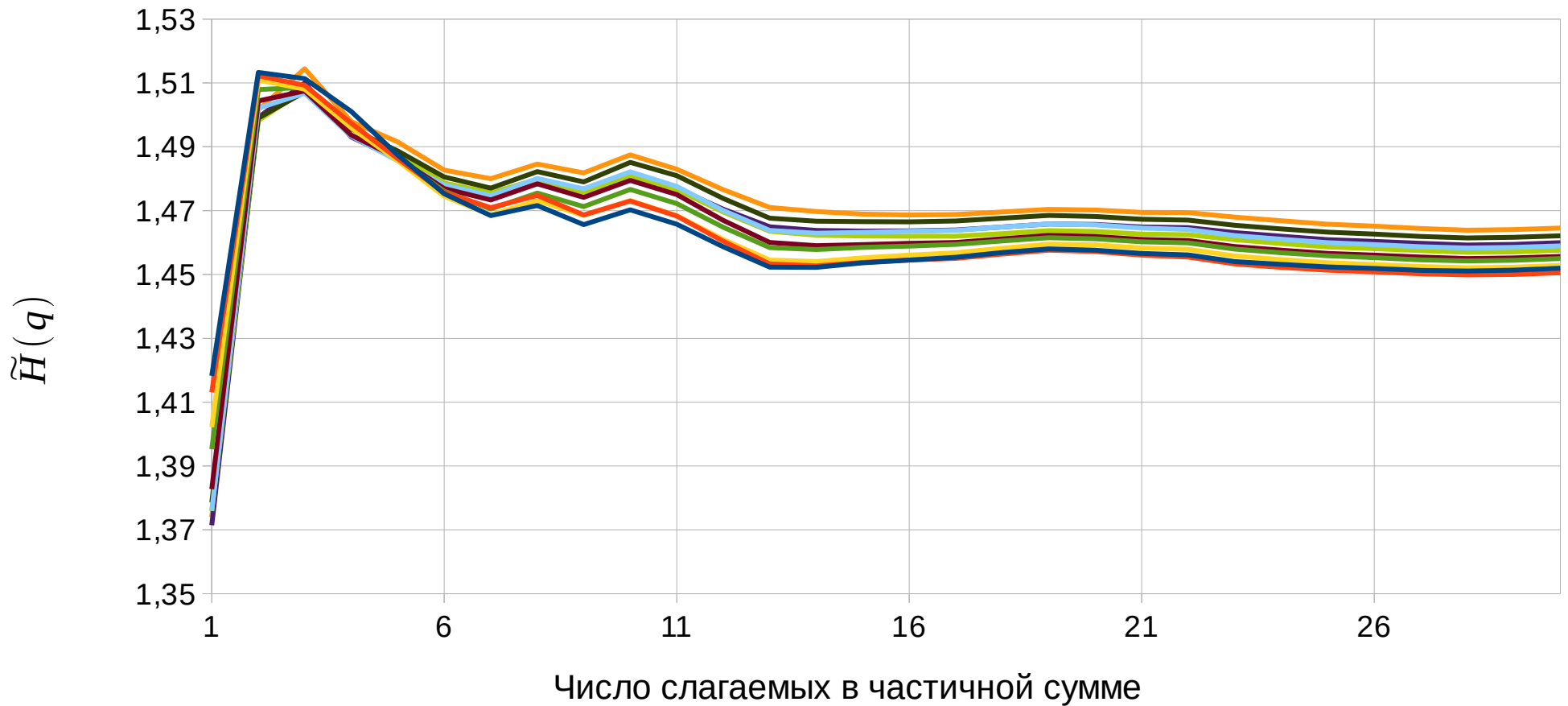
Обобщенная фрактальная размерность для белого шума



Фрактальная размерность

для частичных сумм $S_{\sum_j z_j}$

$$G_{MFDFA} \left(\sum_1^p G_{DF} (G_{FFT} (X(t))) \right) : X(t) \rightarrow \tilde{H}(t, p), \quad p < m(t)$$



Число детерминированных слагаемых в различные моменты времени

