

Федеральное агентство по образованию

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

С.И. Репин    М.Е. Фролов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ  
ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2008

Федеральное агентство по образованию

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

*С.И. Репин    М.Е. Фролов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2008

УДК 519.63: 539.3(075.8)

ББК 22.19: 22.25я73

Р412

**Репин С.И. Математические методы в нелинейных задачах механики сплошных сред** : учеб. пособие / С. И. Репин, М. Е. Фролов. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2008.— 72 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины СДМ.01 “Математические методы в нелинейных задачах механики сплошных сред” подготовки магистров по направлению 010500 “Прикладная математика и информатика”.

В пособии изложено введение в теорию математических и численных методов решения нелинейных краевых задач механики сплошных сред. В нем рассматриваются модели, приводящие к вариационным неравенствам. Особое внимание уделяется задачам математической теории пластичности.

Предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области вычислительной математики и нелинейной механики сплошных сред.

Ил. 8. Библиогр.: 19 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Репин С.И., Фролов М.Е., 2008

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2008

## Введение

Целью учебного пособия является изложение математических и численных методов, используемых при решении нелинейных задач механики сплошной среды. В пособии даются формулировки ряда классических нелинейных задач математической физики (гл. 1) и обсуждается их приложение к моделям нелинейной механики (гл. 2). Анализ задач включает в себя вопросы существования и единственности решения, сходимости аппроксимаций и обсуждение соответствующих численных алгоритмов.

При написании пособия был использован ряд отечественных и зарубежных источников, в том числе не переведившихся на русский язык, а также курсы лекций, которые в разные годы читались С.И. Репиным и Г.А. Серегиним на кафедре “Прикладная математика” Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Овладение материалом требует от читателя знания функционального анализа и вариационного исчисления в объеме, который соответствует программе “Математическое моделирование в технике и естествознании” направления подготовки магистров 010500 “Прикладная математика и информатика”, и знания основ механики сплошных сред.

## Глава 1

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

### 1.1. Предварительные сведения

Рассмотрим  $V$  — гильбертово пространство, элементы которого будем обозначать  $u, v, w, \dots$ , а скалярное произведение —  $(u, v)$ . В этом случае норма в  $V$  вводится следующим образом:

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Пусть  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — симметричная билинейная форма, т.е.

$$a(u, v) = a(v, u). \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Форма  $a(u, v)$  называется  $V$ -эллиптической, если существуют такие константы  $C_1$  и  $C_2$ , не зависящие от  $u$  и  $v$ , что

$$a(u, u) \geq C_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in V; \quad (1.2)$$

$$a(u, v) \leq C_2 \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V. \quad (1.3)$$

Рассмотрим множество линейных непрерывных функционалов на  $V$ , которое образует топологически двойственное (сопряженное) функциональное пространство  $V^*$ . В случае гильбертова пространства в силу теоремы Рисса любой линейный непрерывный (т.е. ограниченный) функционал  $l$  на  $V$  может быть представлен в виде  $l(v) = (f, v)$ , где  $f \in V$ . Определим функционал  $J: V \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v). \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функционал  $J: V \rightarrow \mathbb{R}$  называется *коэрцитивным* на  $V$ , если  $J(v_k) \rightarrow +\infty$  для любой последовательности  $\{v_k\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) такой, что  $\|v_k\| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Заметим, что из оценки (1.2) и ограниченности функционала  $l$  следует коэрцитивность функционала  $J(v)$  на  $V$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Функционал  $J$  имеет на элементе  $v$  производную в смысле Гато, если можно указать элемент  $h \in V^*$  такой, что

$$\langle h, w \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{J(v + \lambda w) - J(v)}{\lambda}, \quad \forall w \in V, \quad (1.5)$$

где  $\langle h, w \rangle$  обозначает значение функционала  $h \in V^*$ , вычисленное на элементе  $w \in V$ .

Элемент  $h$  называют *производной Гато* функционала  $J$  на элементе  $v$  и обозначают  $J'(v)$ .

Рассмотрим теперь следующую задачу: найти функцию  $u \in V$  такую, что

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.6)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Если  $u$  удовлетворяет (1.6), а функционал  $J$  дифференцируем по Гато для всех  $v \in V$ , то

$$\langle J'(u), v - u \rangle = 0, \quad \forall v \in V. \quad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.6) выполнено неравенство

$$J(u + \lambda(v - u)) - J(u) \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Поделив это неравенство на  $\lambda > 0$  и перейдя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получим

$$\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Рассмотрев разность  $J(u + \lambda(u - v)) - J(u)$ , приходим к обратному неравенству. Отсюда следует (1.7), и теорема доказана.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.1.1. Элемент  $J'(u)$  ортогонален ко всем элементам пространства  $V$ , и, следовательно,  $J'(u) = 0$ . Таким образом, необходимое условие экстремума

$$J'(u) = 0 \quad (1.8)$$

следует из вариационного тождества (1.7).

СЛЕДСТВИЕ 1.1.2. Если функционал  $J(v)$  имеет вид (1.4), то  $u$  удовлетворяет вариационному тождеству

$$a(u, v - u) - (f, v - u) = 0, \quad \forall v \in V. \quad (1.9)$$

Действительно, соотношение (1.9) можно записать в эквивалентной форме, заменив  $v - u$  на  $w$

$$a(u, w) = (f, w), \quad \forall w \in V. \quad (1.10)$$

Теперь достаточно вычислить производную Гато функционала  $J$  на элементе  $u$  и приравнять ее к нулю

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{2} a(u + \lambda w, u + \lambda w) - \frac{1}{2} a(u, u) - (f, u + \lambda w) + (f, u) \right) = \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \lambda a(u, w) + \frac{1}{2} \lambda^2 a(w, w) - \lambda (f, w) \right) = a(u, w) - (f, w). \end{aligned}$$

Соотношение (1.10) лежит в основе определения так называемых *обобщенных решений* различных краевых задач математической физики. Оно также может быть использовано для построения вариационно-разностных методов, когда вместо  $u$  разыскивается его приближение  $u_h$ , принадлежащее  $V_h$ , называемое *галеркинской аппроксимацией* и удовлетворяющее тождеству

$$a(u_h, w_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in V_h,$$

где  $V_h \subset V$ ,  $\dim V_h = n < +\infty$ . В этом случае основной вопрос заключается в установлении условий, при которых имеет место сходимость  $u_h \rightarrow u$  в  $V$  при  $h \rightarrow 0$ .

К сожалению, многие задачи нельзя сформулировать в виде вариационных тождеств. В этом случае мы приходим к необходимости рассмотрения так называемых *вариационных неравенств* (см., например, [1], [3], [14], [18]). Наиболее распространенными причинами являются следующие:

1. Функционал  $J$  недифференцируем по Гато.
2. Задача связана с минимизацией функционала не на всем пространстве, а на некотором множестве  $K$  пространства  $V$ .

## 1.2. Вариационные неравенства и выпуклые вариационные задачи

Рассмотрим более сложную вариационную задачу. Пусть

$$J(v) = J_0(v) + j(v),$$

где  $J_0(v): V \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый, дифференцируемый по Гато, непрерывный и коэрцитивный на  $V$  функционал, а  $j(v): V \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый, непрерывный, но не обязательно дифференцируемый функционал. Пусть  $K \subset V$  — выпуклое, замкнутое, непустое множество.

Имеем вариационную задачу:

Задача P. Найти функцию  $u \in K$  такую, что

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Сделанные выше предположения относительно функционалов  $J_0$  и  $j$  и множества  $K$  гарантируют существование элемента  $u$  (*минимайзера*), на котором достигается точная нижняя грань, обозначаемая далее  $\inf P$ . Это следует из известной теоремы вариационного исчисления, в которой утверждается, что полунепрерывный снизу выпуклый функционал достигает своей точной нижней грани на непустом, выпуклом, замкнутом подмножестве рефлексивного банахова пространства.

**ТЕОРЕМА 1.2.** *При сделанных выше предположениях следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $u$  — минимайзер Задачи P.
- (2)  $u$  — решение вариационного неравенства

$$\langle J'_0(u), w - u \rangle + j(w) - j(u) \geq 0, \quad \forall w \in K. \quad (1.11)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Покажем, что из (1) следует (2).

Предположим, что существует элемент  $u \in K$  такой, что  $J(u) = \inf P$ . Следовательно

$$J(v) \geq J(u), \quad \forall v \in K.$$

Поскольку  $K$  — выпуклое множество, то элемент  $v = \lambda u + (1 - \lambda)w$  принадлежит  $K$  для произвольного элемента  $w \in K$  и  $\lambda \in (0, 1)$ . Следовательно

$$\begin{aligned} J(w + \lambda(u - w)) &\geq J(u); \\ J_0(w + \lambda(u - w)) + j(w + \lambda(u - w)) &\geq J_0(u) + j(u). \end{aligned}$$

По условиям теоремы функционал  $j$  — выпуклый, т.е.

$$j(w + \lambda(u - w)) = j(\lambda u + (1 - \lambda)w) \leq \lambda j(u) + (1 - \lambda)j(w),$$

поэтому

$$J_0(w + \lambda(u - w)) - J_0(u) + (1 - \lambda)(j(w) - j(u)) \geq 0.$$

Вводя новый параметр  $\mu = 1 - \lambda$ , получаем

$$J_0(w + (1 - \mu)(u - w)) - J_0(u) + \mu(j(w) - j(u)) \geq 0, \quad \forall w \in K,$$

или

$$\frac{J_0(u + \mu(w - u)) - J_0(u)}{\mu} + j(w) - j(u) \geq 0.$$



Переходя в последнем неравенстве к пределу при  $\mu \rightarrow +0$ , имеем

$$\langle J'_0(u), w - u \rangle + j(w) - j(u) \geq 0, \quad \forall w \in K.$$

Покажем, что из (2) следует (1).

Пусть  $u$  — решение вариационного неравенства

$$\langle J'_0(u), w - u \rangle + j(w) - j(u) \geq 0, \quad \forall w \in K.$$

Используя неравенство

$$J_0(w) \geq J_0(u) + \langle J'_0(u), w - u \rangle,$$

справедливое для выпуклых дифференцируемых функций, получим

$$J_0(w) \geq J_0(u) + j(u) - j(w), \quad \forall w \in K,$$

т.е.

$$J(u) \leq J(w), \quad \forall w \in K,$$

и  $u$  — минимайзер Задачи  $P$ . □

Соотношение (1.11) называется *вариационным неравенством*, эквивалентным вариационной Задаче  $P$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.2.1.** Если  $J_0(v)$  определяется формулой (1.4), то соответствующая задача минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + j(v)$$

на множестве  $K$  эквивалентна нахождению решения вариационного неравенства

$$a(u, v - u) - (f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \quad \forall v \in K; \quad (1.12)$$

причем задача минимизации функционала  $J(v)$  на множестве  $K$  имеет единственное решение.

Действительно,  $J(v): K \rightarrow \mathbb{R}$  является строго выпуклым, непрерывным и коэрцитивным на  $V$ , а  $K$  — выпуклое замкнутое подмножество  $V$ .

В частности, если  $j(v) \equiv 0$ , то задача минимизации функционала  $J(v)$  на множестве  $K$  эквивалентна определению элемента  $u \in V$  такого, что

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \quad (1.13)$$

Неравенство (1.13) называется *эллиптическим вариационным неравенством*, а элемент  $u$  — его *решением*. Таким образом, возникает проблема построения приближенных решений вариационных неравенств.

### 1.3. Аппроксимация вариационных неравенств

#### Аппроксимирующие подпространства

Пусть  $h$  — некоторый параметр (положительное число). Рассмотрим семейство  $V_h$  конечномерных векторных пространств.

Будем говорить, что  $V_h$  является *внутренней* (или *конформной*) аппроксимацией пространства  $V$ , если выполнены следующие условия:

1. Для любого  $h$

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h < +\infty. \quad (1.14)$$

2. Для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  и любого элемента  $v \in V$  существует такое значение  $h_\varepsilon > 0$ , зависящее только от  $\varepsilon$ , что для  $\forall h < h_\varepsilon$  найдется элемент  $v_h \in V_h$  такой, что

$$\|v_h - v\| < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Свойство (1.15) принято называть свойством *предельной плотности*.

Рассмотрим один из вариантов построения подпространств  $V_h$ , обладающих свойствами (1.14) и (1.15), который обычно связывают со схемой *метода конечных элементов*. Рассмотрим простейший случай, когда  $V = \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ , где  $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$  — подпространство функций из пространства Соболева  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ , обращающихся в ноль в смысле оператора следа на границе некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , которая для простоты предполагается выпуклой и полигональной.

Пусть с каждым значением параметра  $h$  связано разбиение области  $\Omega$  на некоторое семейство треугольников  $\mathcal{T}_h$ , называемое *триангуляцией*. В результате получаем область

$$\Omega_h = \cup_{j=1}^N T_j,$$

где  $N$  — число треугольников в разбиении  $\mathcal{T}_h$  (в общем случае речь может идти не только о треугольных элементах, но и о симплексах). Потребуем, чтобы совокупность всех рассматриваемых разбиений области  $\Omega$  обладала следующими свойствами:

1. Для любого элемента  $T \in \mathcal{T}_h$  выполняется неравенство

$$\text{meas}(T) \leq \phi(h),$$

где  $\text{meas}(T)$  — площадь элемента  $T$ , а  $\phi(h)$  — заданная функция параметра  $h$  такая, что  $\phi(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

2. Если  $T \in \mathcal{T}_h$ , то  $T \subset \Omega$ , т.е. часть элемента не может находиться за пределами области  $\Omega$ .

3. Для любого компакта  $E \subset \Omega$  при достаточно малых  $h$  имеет место включение  $E \subset \Omega_h$ .
4. Для любых двух элементов  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  пересечение  $T_1 \cap T_2$  — либо пусто, либо состоит из общей вершины, либо из общей грани.
5. При любом  $h$  на любом элементе  $T \in \mathcal{T}_h$  выполняется неравенство

$$\frac{r(T)}{R(T)} > c,$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $h$ , а  $r(T)$  и  $R(T)$  — радиус вписанного в  $T$  и описанного вокруг  $T$  круга, соответственно.

При сделанных выше предположениях имеем

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Пусть  $X_0$  — одна из вершин произвольного элемента триангуляции, не попадающая на границу области  $\Omega$ , а  $X_1, X_2, \dots, X_k$  — вершины, связанные с ней ребрами (см. рис. 1.1, где  $k = 5$ ). Построим функцию  $\varphi_0$ , обладающую следующими свойствами:

1.  $\varphi_0 = 1$  в вершине  $X_0$ ;
2.  $\varphi_0 = 0$  во всех вершинах  $X_1, X_2, \dots, X_k$ ;
3.  $\varphi_0 = 0$  вне элементов, примыкающих к вершине  $X_0$ ;
4.  $\varphi_0$  — аффинная функция на каждом элементе  $T \in \mathcal{T}_h$ .

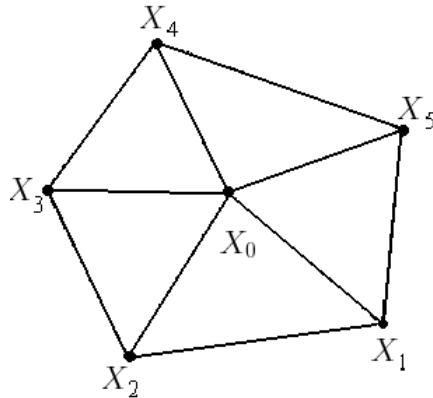


Рис. 1.1. Элементы триангуляции, примыкающие к вершине  $X_0$

Конечномерное пространство, построенное с помощью таких базисных функций, соответствующих всем вершинам триангуляции  $\mathcal{T}_h$ , обозначим  $V_h$ .

Очевидно, что при любом  $h$  подпространство  $V_h$  содержится в  $V$ . Покажем, что условие предельной плотности выполнено. Достаточно показать, что оно выполнено для гладких  $v$ , поскольку такие функции всюду плотны в  $V$ .

Выберем произвольную гладкую функцию  $v$ . Поставим ей в соответствие элемент конечномерного пространства  $V_h$ , определяемый следующим образом:

$$v_h = \sum_{i \in M_h^{int}} v(X_i) \varphi_i(x),$$

где  $M_h^{int}$  — множество индексов узлов разбиения  $\mathcal{T}_h$ , лежащих внутри области  $\Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|v_h - v\|^2 &= \sum_j \int_{T_j} (|v_h - v|^2 + |v_{hx} - v_x|^2 + |v_{hy} - v_y|^2) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Omega_h} (|v|^2 + |v_x|^2 + |v_y|^2) d\Omega, \end{aligned}$$

где  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_{hx}$  и  $v_{hy}$  — частные производные функций  $v$  и  $v_h$ , соответственно.

Поскольку  $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , последний интеграл может быть сделан сколь угодно малым в силу ограниченности функции  $v$  и ее производных почти всюду в  $\Omega$ . Используя известные оценки для интерполянтов, нетрудно получить оценки сверху на каждом элементе  $T_j$  для интегралов, стоящих в первой строке, включающие в себя  $\mathbf{W}_2^2$ -норму функции  $v$  и гарантирующие стремление всей суммы по элементам к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Следовательно, свойство предельной плотности выполнено.

### **Сходимость галеркинских аппроксимаций для вариационных тождеств**

Рассмотрим схему доказательства сходимости конформных аппроксимаций на примере задачи для вариационного тождества

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V, \quad (1.16)$$

рассмотренного в разделе 1.1. Вместо (1.16) в этом случае решается дискретная задача: найти элемент  $u_h \in V_h$  такой, что

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.17)$$

Как уже говорилось ранее, такой элемент  $u_h$  называется галеркинской аппроксимацией  $u$  — решения задачи (1.16).

**ТЕОРЕМА 1.3.** *При сформулированных в разделе 1.1 предположениях относительно билинейной формы  $a(\cdot, \cdot)$  и предположениях данного*

раздела относительно свойств конечномерных подпространств  $V_h$  последовательность галеркинских аппроксимаций  $u_h$  сходится к  $u$  в  $V$  при  $h \rightarrow 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Коши–Шварца из (1.17) следует оценка

$$a(u_h, u_h) = (f, u_h) \leq \|f\| \|u_h\|.$$

Учитывая (1.2), имеем

$$C_1 \|u_h\|^2 \leq \|f\| \|u_h\|,$$

т.е.

$$\|u_h\| \leq \frac{1}{C_1} \|f\|.$$

Следовательно, последовательность  $u_h$  ограничена, и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы также будем обозначать  $u_h$ . Таким образом,

$$u_h \rightharpoonup w \text{ в } V \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Пусть  $v$  — произвольный элемент из  $V$ . В силу свойства предельной плотности существует последовательность элементов  $v_h \in V_h$  таких, что  $v_h \rightarrow v$  в  $V$ . Тогда

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &\rightarrow a(w, v); \\ (f, v_h) &\rightarrow (f, v). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a(w, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Таким образом,  $w$  — решение вариационного тождества (1.16), и поскольку оно единственно,  $w = u$ .

Далее, переходя к пределу в тождестве

$$\begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) &= a(u_h, u_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u) = \\ &= (f, u_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u), \end{aligned}$$

имеем

$$a(u_h - u, u_h - u) \rightarrow (f, u) - a(u, u) = 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

следовательно, с учетом (1.2)

$$C_1 \|u_h - u\|^2 \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Таким образом, установлена сильная сходимость последовательности  $u_h$  к  $u$  при  $h \rightarrow 0$ , и теорема доказана.  $\square$

## Сходимость галеркинских приближений для вариационных неравенств

В случае аппроксимации вариационных неравенств возникают дополнительные условия, связанные с аппроксимацией выпуклого множества  $K$ . Для каждого  $h$  рассмотрим выпуклое множество  $K_h$ , обладающее следующими свойствами:

1.  $K_h \subset V_h, \quad \forall h$ .
2.  $K_h$  аппроксимирует  $K$  в следующем смысле: для любых  $v \in K$  и  $\varepsilon > 0$  существует значение  $h_\varepsilon > 0$ , зависящее только от  $\varepsilon$ , такое, что при  $\forall h < h_\varepsilon$  найдется элемент  $v_h \in K_h$ , для которого

$$\|v_h - v\| < \varepsilon.$$

3. Если  $v_h \rightarrow v$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $v \in K$ .

Заметим, что  $V_h \subset V$ , но не обязательно  $K_h \subset K$ . С практической точки зрения построение множеств  $K_h$  с указанными выше свойствами представляет определенную трудность.

Рассмотрим задачу следующего вида:

Задача  $P_1$ . Найти функцию  $u \in K$  такую, что

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \quad (1.18)$$

Поставим в соответствие Задаче  $P_1$  дискретную Задачу  $P_{1h}$ .

Задача  $P_{1h}$ . Найти функцию  $u_h \in K_h$  такую, что

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_h. \quad (1.19)$$

Элемент  $u_h$ , являющийся решением Задачи  $P_{1h}$ , называется *галеркинским приближением (аппроксимацией)* для соответствующего вариационного неравенства.

**ТЕОРЕМА 1.4.** Пусть  $u$  — решение Задачи  $P_1$ , а  $u_h$  — решение Задачи  $P_{1h}$ . При сделанных выше предположениях относительно  $V_h$  и  $K_h$  последовательность приближенных решений  $u_h$  сходится к точному решению  $u$  в  $V$  при  $h \rightarrow 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $v$  — произвольный элемент множества  $K$ . Выберем последовательность элементов  $v_h \in K_h$ , сходящуюся к  $v$ . Из неравенства (1.19) имеем

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - (f, v_h - u_h), \quad (1.20)$$

откуда по свойствам билинейной формы  $a(\cdot, \cdot)$  следует оценка

$$C_1 \|u_h\|^2 \leq C_2 \|u_h\| \|v_h\| + \|f\| (\|u_h\| + \|v_h\|).$$

Таким образом, из ограниченности последовательности  $v_h$  делаем вывод, что последовательность  $u_h$  ограничена и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$u_h \rightharpoonup w \text{ в } V, \quad u_h \in K_h;$$

причем, в силу требования 3,  $w \in K$ .

Перейдем к пределу в (1.20), учитывая слабую полунепрерывность снизу нормы, определяемой билинейной формой, а именно

$$\liminf_{h \rightarrow 0} a(u_h, u_h) \geq a(w, w);$$

и сильную сходимость  $v_h \rightarrow v$  в  $V$ . Имеем

$$a(w, w) \leq a(w, v) - (f, v - w).$$

Поскольку элемент  $v$  был выбран произвольным образом, заключаем, что  $w$  — решение вариационного неравенства (1.18), т.е.  $w = u$ .

Осталось показать, что  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $V$ . Из (1.20) следует, что

$$\begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) &= a(u_h, u_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u) \leq \\ &\leq a(u_h, v_h) - (f, v_h - u_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} v_h &\rightarrow v \text{ сильно в } V; \\ u_h &\rightarrow u \text{ слабо в } V, \end{aligned}$$

поэтому правая часть последнего неравенства при  $h \rightarrow 0$  стремится к следующему пределу:

$$a(u, v) - (f, v - u) - a(u, 0) - a(u, u) = a(u, v) - (f, v - u) - a(u, u).$$

Таким образом,

$$\liminf_{h \rightarrow 0} a(u_h - u, u_h - u) \leq a(u, v) - (f, v - u) - a(u, u), \quad \forall v \in K.$$

Выбирая  $v = u$ , получим

$$\liminf_{h \rightarrow 0} a(u_h - u, u_h - u) = 0 \geq C_1 \liminf_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|^2.$$

Следовательно,  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $V$ . □

Рассмотрим другую пару задач.

Задача  $P_2$ . Найти функцию  $u \in K$  такую, что

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K, \quad (1.21)$$

где  $j(v)$  — выпуклый непрерывный, но недифференцируемый функционал.

Поставим в соответствие Задаче  $P_2$  дискретную задачу.

Задача  $P_{2h}$ . Найти функцию  $u_h \in K_h$  такую, что

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq (f, v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_h. \quad (1.22)$$

**ТЕОРЕМА 1.5.** *Если функционал  $j(v)$  является липшицевым с константой  $L$ , т.е.*

$$|j(v_1) - j(v_2)| \leq L\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad (1.23)$$

то утверждение Теоремы 1.4 справедливо для пары задач  $P_2$ – $P_{2h}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть выбраны произвольный элемент  $v$  множества  $K$  и последовательность  $v_h \in K_h$  такая, что  $v_h \rightarrow v$  в  $V$ . Тогда из (1.22), учитывая (1.23), (1.3) и (1.2), имеем

$$a(u_h, u_h - v_h) \leq (f, u_h - v_h) + j(v_h) - j(u_h);$$

$$\begin{aligned} a(u_h - v_h, u_h - v_h) &\leq j(v_h) - j(u_h) + (f, u_h - v_h) - a(v_h, u_h - v_h) \leq \\ &\leq (\|f\| + L)\|u_h - v_h\| + C_2\|v_h\| \|u_h - v_h\|; \end{aligned}$$

$$\|u_h - v_h\| \leq \frac{1}{C_1} (\|f\| + L + C_2\|v_h\|).$$

Из последнего неравенства следует, что поскольку последовательность  $v_h$  ограничена, последовательность  $u_h$  также ограничена и из нее можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность  $u_h \rightharpoonup w$ .

Заметим, что функционал  $j$  — выпуклый и непрерывный на  $V$ , т.е. он является слабо полунепрерывным снизу, поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} (a(u_h, u_h) + j(u_h)) \geq a(w, w) + j(w).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} j(v_h) &\rightarrow j(v) \quad \text{при } h \rightarrow 0; \\ (f, v_h - u_h) &\rightarrow (f, v - w) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Записывая неравенство (1.22) в виде

$$a(u_h, v_h) + j(v_h) - (f, v_h - u_h) \geq a(u_h, u_h) + j(u_h)$$

и переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем

$$a(w, v) + j(v) - (f, v - w) \geq a(w, w) + j(w)$$



или

$$a(w, v - w) + j(v) - j(w) \geq (f, v - w).$$

В силу произвольности  $v$  заключаем, что  $w$  — решение вариационного неравенства (1.21), т.е.  $w = u$ .

Установим сильную сходимость последовательности  $u_h$  к  $u$ . Рассмотрим тождество

$$a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h, u_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u).$$

Поскольку

$$a(u_h, u_h) \leq j(v_h) - j(u_h) + a(u_h, v_h) + (f, u_h - v_h),$$

то

$$a(u_h - u, u_h - u) + j(u_h) \leq j(v_h) + a(u_h, v_h) + (f, u_h - v_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u).$$

Учитывая, что

$$u_h \rightarrow u \text{ слабо в } V;$$

$$v_h \rightarrow v \text{ сильно в } V;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} j(u_h) \geq j(u),$$

и переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим для  $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (a(u_h - u, u_h - u)) + j(u) &\leq \\ &\leq j(v) + a(u, v) + (f, u - v) - a(u, 0) - a(u, u). \end{aligned}$$

Полагая  $v = u$ , имеем

$$a(u_h - u, u_h - u) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

следовательно,

$$\|u_h - u\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

□

## 1.4. Методы штрафа и регуляризации

### Метод штрафа

Рассмотрим вариационное неравенство

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K, \quad (1.24)$$

которому соответствует вариационная задача:

найти такую функцию  $u \in K$ , что

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v), \quad \text{где } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v). \quad (1.25)$$

Введем функцию  $\Psi(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающую следующими свойствами:

1.  $\Psi(v) = 0$ , если  $v \in K$ .
2.  $\Psi(v) > 0$ , если  $v \notin K$ .
3.  $\Psi(v)$  — выпуклая, непрерывная, дифференцируемая по Гато.
4.  $\Psi(v)$  быстро возрастает при увеличении расстояния до множества  $K$ .

Построим вспомогательный функционал

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \Psi(v)$$

и рассмотрим вместо (1.25) следующую вариационную задачу: найти такую функцию  $u_\varepsilon \in V$ , что

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in V} J_\varepsilon(v). \quad (1.26)$$

В силу доказанной выше теоремы о существовании решения вариационных задач задача (1.26) разрешима и имеет единственное решение. Задача (1.26) в отличие от (1.25) является задачей безусловной минимизации (минимум ищется на всем пространстве  $V$ ), что удобно с вычислительной точки зрения.

Рассмотрим оператор

$$\Theta(v) := \Psi'(v),$$

который действует из пространства  $V$  в двойственное пространство  $V^*$ , а поскольку мы предполагаем, что  $V$  — гильбертово, то  $\Theta : V \rightarrow V$ . Оператор  $\Theta$  обладает следующими свойствами:

1.  $\Theta(v) = 0$ , если  $v \in K$  (т.е.  $\ker \Theta = K$ ).
2.  $\Theta$  — монотонный оператор.

Действительно, если  $\Psi(v)$  — выпуклый дифференцируемый функционал, то имеет место неравенство

$$\Psi(v_2) \geq \Psi(v_1) + (\Psi'(v_1), v_2 - v_1), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Из него следуют оценки

$$\begin{aligned} \Psi(v_1) &\geq \Psi(v_2) + (\Psi'(v_2), v_1 - v_2); \\ \Psi(v_2) &\geq \Psi(v_1) + (\Psi'(v_1), v_2 - v_1), \end{aligned}$$

приводящие к неравенству

$$(\Psi'(v_1) - \Psi'(v_2), v_1 - v_2) \geq 0. \quad (1.27)$$

Неравенство (1.27) показывает, что  $\Psi'(v)$  — монотонный оператор.

Отметим, что задача (1.26) эквивалентна задаче поиска решения  $u_\varepsilon \in V$  вариационного тождества

$$a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} (\Theta(u_\varepsilon), v) = (f, v), \quad \forall v \in V; \quad (1.28)$$

причем это решение существует и единственно.

**ТЕОРЕМА 1.6.** *При сформулированных выше предположениях*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } V \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала покажем, что последовательность  $u_\varepsilon$  является ограниченной в  $V$ . Для этого выберем элемент  $u_0 \in K$  и положим  $v = u_\varepsilon - u_0$ . Тогда

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + \frac{1}{\varepsilon} (\Theta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u_0) = (f, u_\varepsilon - u_0).$$

Поскольку  $\Theta(u_0) = 0$ , то

$$\begin{aligned} a(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + \frac{1}{\varepsilon} (\Theta(u_\varepsilon) - \Theta(u_0), u_\varepsilon - u_0) = \\ = (f, u_\varepsilon - u_0) - a(u_0, u_\varepsilon - u_0). \end{aligned}$$

В силу монотонности оператора  $\Theta$  второе слагаемое в левой части равенства неотрицательно и, следовательно,

$$a(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \leq (\|f\| + C_2\|u_0\|) \|u_\varepsilon - u_0\|.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \leq \frac{1}{C_1} (\|f\| + C_2\|u_0\|),$$

которая показывает ограниченность  $u_\varepsilon$ .

Из последовательности  $u_\varepsilon$  выберем слабо сходящуюся подпоследовательность, которую также назовем  $u_\varepsilon$ . Тогда

$$u_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ в } V.$$

В силу (1.28)

$$(\Theta(u_\varepsilon), v) = \varepsilon ((f, v) - a(u_\varepsilon, v)), \quad \forall v \in V,$$

и

$$|(\Theta(u_\varepsilon), v)| \leq \varepsilon (\|f\| + C_2\|u_\varepsilon\|) \|v\|, \quad \forall v \in V. \quad (1.29)$$

Вследствие выпуклости функции  $\Psi$ , имеем

$$\Psi(u_0) \geq \Psi(u_\varepsilon) + (\Theta(u_\varepsilon), u_0 - u_\varepsilon). \quad (1.30)$$

Поскольку  $\Psi(u_0) = 0$ , то из (1.29) и (1.30) следует

$$\Psi(u_\varepsilon) \leq (\Theta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u_0) \leq \varepsilon (\|f\| + C_2 \|u_\varepsilon\|) \|u_\varepsilon - u_0\|.$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и учитывая неотрицательность функции  $\Psi$ , получаем

$$0 \leq \Psi(w) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(u_\varepsilon) \leq 0,$$

т.е.  $\Psi(w) = 0$  и  $w \in K$ .

Покажем, что элемент  $w$  является решением исходного вариационного неравенства (1.24). Подставим в (1.28) вместо  $v$  элемент  $v - u_\varepsilon$ , где  $v \in K$ . Тогда имеем

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} (\Theta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon).$$

Поскольку  $v \in K$ , то  $\Theta(v) = 0$  и можно записать

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (\Theta(v) - \Theta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \geq 0.$$

Следовательно,

$$a(u_\varepsilon, v) \geq (f, v - u_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon), \quad \forall v \in K.$$

Переходя к пределу по  $\varepsilon$  и учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq a(w, w),$$

получим

$$a(w, v - w) \geq (f, v - w), \quad \forall v \in K.$$

Таким образом,  $w = u$ . Доказательство сильной сходимости последовательности  $u_\varepsilon$  к  $u$  проводится по изложенной ранее схеме.  $\square$

### Метод регуляризации

Рассмотрим вариационное неравенство

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in V, \quad (1.31)$$

где  $j : V \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый непрерывный на  $V$  функционал.

Идея метода заключается в замене сложной исходной задачи последовательностью более простых задач. Этот метод применяется, если  $j(v)$  — недифференцируемый по Гато функционал. В качестве распространенного примера можно привести следующий функционал:

$$j(v) = \int_{\Omega} |v| dx, \quad (1.32)$$

который заменяют на

$$j_\varepsilon(v) = \int_{\Omega} \sqrt{\varepsilon + |v|^2} dx,$$

и вместо задачи (1.31) рассматривают следующую *регуляризованную* задачу:

найти элемент  $u_\varepsilon \in V$  такой, что

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (f, v - u_\varepsilon), \quad \forall v \in V. \quad (1.33)$$

Такая замена обоснована, если функционал  $j_\varepsilon$  удовлетворяет следующим требованиям:

$$|j_\varepsilon(v) - j(v)| \leq C_\varepsilon \|v\|, \quad \forall v \in V, \quad \text{где } C_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (1.34)$$

$$j_\varepsilon - \text{дифференцируемый по Гато функционал при } \forall \varepsilon > 0; \quad (1.35)$$

$$j_\varepsilon - \text{выпуклый и непрерывный при } \forall \varepsilon > 0. \quad (1.36)$$

При выполнении условий (1.34)–(1.36) задачу (1.33) можно представить в виде вариационного тождества

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + (j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) = (f, v - u_\varepsilon), \quad \forall v \in V, \quad (1.37)$$

решение которого можно искать при помощи хорошо известных методов. Таким образом, идея метода регуляризации заключается в построении последовательности решений регуляризованных задач (1.37), сходящейся к решению исходного вариационного неравенства (1.31) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Докажем сходимостъ при дополнительном предположении, что функционал  $j(v)$  и его регуляризации при любом  $\varepsilon > 0$  являются липшицевыми с некоторой константой  $L$ , т.е.

$$\begin{aligned} |j(v_1) - j(v_2)| &\leq L \|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in V; \\ |j_\varepsilon(v_1) - j_\varepsilon(v_2)| &\leq L \|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 1.7.** *При сделанных выше предположениях*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } V \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем ограниченность последовательности  $u_\varepsilon$ . Положив в (1.37)  $v = 2u_\varepsilon$ , имеем

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (f, u_\varepsilon) - (j'_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \leq (\|f\| + L) \|u_\varepsilon\|,$$

откуда следует, что последовательность  $u_\varepsilon$  ограничена. Следовательно, из нее можно выделить слабо сходящуюся к некоторому пределу  $w \in V$  подпоследовательность, которую также обозначим  $u_\varepsilon$ . Покажем, что  $w$  является решением (1.31).

Неравенство (1.33) можно записать в следующем виде:

$$a(u_\varepsilon, v) + j_\varepsilon(v) + j(u_\varepsilon) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \geq a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + j(u_\varepsilon). \quad (1.38)$$

Заметим, что

$$a(u_\varepsilon, v) \rightarrow a(w, v) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (1.39)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + j(u_\varepsilon)) \geq a(w, w) + j(w); \quad (1.40)$$

$$(f, v - u_\varepsilon) \rightarrow (f, v - w) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.41)$$

Из условия (1.34) имеем

$$j_\varepsilon(v) \rightarrow j(v), \quad j_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow j(u_\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда с учетом (1.39)–(1.41), переходя к пределу в (1.38), получаем

$$a(w, v - w) + j(v) - j(w) \geq (f, v - w),$$

т.е.  $w$  — решение (1.31).

Сильная сходимость последовательности  $u_\varepsilon$  доказывается аналогично предыдущим теоремам.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** При решении задачи (1.31) по методу регуляризации возникают два параметра:

1.  $h$  — параметр дискретизации;
2.  $\varepsilon$  — параметр регуляризации.

На практике эти параметры могут появляться в любой последовательности, например, сначала дискретизация задачи

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq (f, v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

а затем ее регуляризация

$$a(u_{h\varepsilon}, v_h - u_{h\varepsilon}) + j_\varepsilon(v_h) - j_\varepsilon(u_{h\varepsilon}) \geq (f, v_h - u_{h\varepsilon}), \quad \forall v_h \in V_h.$$

При этом необходимо установить, что для любого  $\delta > 0$  при достаточно малых  $h$  и  $\varepsilon$

$$\|u_{h\varepsilon} - u\| < \delta.$$

Предположим, что дискретизация строится методом конечных элементов на последовательности вложенных сеток, тогда соответствующие конечномерные подпространства вложены друг в друга, т.е.

$$V_{h_1} \subset V_{h_2} \subset V_{h_3} \subset \dots \subset V \quad \text{для} \quad h_1 > h_2 > h_3 > \dots > 0.$$

Доказательство в этом случае проводится в два этапа.

1. Пусть доказана сходимость галеркинских аппроксимаций, т.е.

$$u_h \rightarrow u \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

тогда при достаточно малых  $h$  имеем

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

2. При помощи теоремы о сходимости приближений по методу регуляризации (в применении уже к конечномерной задаче при фиксированном  $h$ ), получаем

$$u_{h\varepsilon} \rightarrow u_h \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

т.е. при достаточно малых  $\varepsilon$  справедлива оценка

$$\|u_{h\varepsilon} - u_h\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Тогда

$$\|u - u_{h\varepsilon}\| \leq \delta.$$

Можно действовать наоборот: сначала провести регуляризацию задачи, а затем строить ее дискретизацию. Доказательство аналогично.

Заметим, что при малых  $\varepsilon$  ухудшается обусловленность соответствующей конечномерной задачи. Это означает, что функционалы дискретных задач имеют такую структуру, что величина производной по направлению в окрестности точки минимума резко различается в зависимости от этого направления. Это существенно осложняет нахождение решения такой задачи.

## 1.5. Методы теории двойственности

### Двойственная вариационная задача

Во многих задачах наряду с исходной постановкой можно рассмотреть так называемую двойственную задачу. Решить последнюю в некоторых случаях оказывается проще. Общая идея методов теории двойственности состоит в следующем. Пусть имеется исходная вариационная задача:

найти элемент  $u \in K$  такой, что

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (1.42)$$

Во многих случаях функционал  $J(v)$  допускает следующее представление:

$$J(v) = \sup_{y \in \Lambda} L(v, y), \quad (1.43)$$

где  $\Lambda$  — выпуклое замкнутое множество некоторого гильбертова пространства  $Y$ . Функционал

$$L : V \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

обычно называют *лагранжианом*. Тогда исходную задачу можно записать в виде

$$\inf_{v \in K} \sup_{y \in \Lambda} L(v, y).$$

Очевидно, что

$$\inf_{v \in K} L(v, y) \leq L(v, y), \quad \forall y \in \Lambda, \quad \forall v \in K,$$

а следовательно,

$$\sup_{y \in \Lambda} \inf_{v \in K} L(v, y) \leq \sup_{y \in \Lambda} L(v, y), \quad \forall v \in K.$$

Переходя к  $\inf$  в правой части неравенства, получим

$$\sup_{y \in \Lambda} \inf_{v \in K} L(v, y) \leq \inf_{v \in K} \sup_{y \in \Lambda} L(v, y). \quad (1.44)$$

Из (1.44) следует, что

$$\sup_{y \in \Lambda} \inf_{v \in K} L(v, y) \leq J(u).$$

Во многих важных приложениях соотношение (1.44) реализуется в виде равенства; причем лагранжиан  $L(v, y)$  имеет *седловую точку*, т.е. существует пара функций  $(u, p) \in K \times \Lambda$  таких, что

$$L(u, y) \leq L(u, p) \leq L(v, p), \quad \forall v \in K, \quad \forall y \in \Lambda.$$

В этом случае

$$J(u) = \sup_{y \in \Lambda} \inf_{v \in K} L(v, y) = \sup_{y \in \Lambda} I^*(y),$$

где

$$I^*(y) = \inf_{v \in K} L(v, y),$$

а возникающая задача

$$I^*(p) = \sup_{y \in \Lambda} I^*(y) \quad (1.45)$$



называется *двойственной* к исходной.

Методы теории двойственности основаны либо на решении задачи (1.45) вместо (1.42), либо на различных методах поиска седловой точки лагранжиана  $L$ .

Пример 1. Задачу минимизации выпуклого функционала  $J$  на множестве  $K$  можно формально записать в виде задачи безусловной минимизации, если ввести характеристическую функцию множества  $K$

$$\Psi_K(v) = \begin{cases} 0 & , v \in K; \\ +\infty & , v \notin K. \end{cases}$$

При этом

$$\inf_{v \in K} J(v) = \inf_{v \in V} (J(v) + \Psi_K(v)).$$

Пусть  $V^*$  — пространство топологически двойственное к  $V$  (тут не предполагается, что  $V$  — гильбертово). Рассмотрим  $\Psi_K^*(v^*) : V^* \rightarrow \mathbb{R}$  — сопряженный по Юнгу–Фенхелю или полярный к  $\Psi_K$  функционал (см., например, [16], [17]). Эти два функционала связаны следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \Psi_K^*(v^*) &= \sup_{v \in V} (\langle v^*, v \rangle - \Psi_K(v)); \\ \Psi_K(v) &= \sup_{v^* \in V^*} (\langle v^*, v \rangle - \Psi_K^*(v^*)). \end{aligned}$$

Если соответствующий функционал  $\Psi_K^*$  построен, то, определив лагранжиан

$$L(v, v^*) = \langle v^*, v \rangle + J(v) - \Psi_K^*(v^*),$$

можно сформулировать задачу в минимаксной форме. В частности, для множества

$$K = \{v \in V \mid \|v\|_V \leq 1\}$$

функционал  $\Psi_K^*$  имеет простой вид

$$\Psi_K^*(v^*) = \|v^*\|_{V^*},$$

где  $\|\cdot\|_V$  и  $\|\cdot\|_{V^*}$  — нормы в пространствах  $V$  и  $V^*$ , соответственно (до сих пор мы рассматривали только норму в пространстве  $V$ , поэтому не возникало необходимости введения в обозначение нижнего индекса).

Пример 2. Пусть  $V$  — некоторое банахово пространство функций, определенных в области  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , а функционал задачи имеет вид

$$J(v) = \int_{\Omega} (g(v, \nabla v) + \alpha |v|) dx.$$

Отметим, что конкретный вид пространства  $V$ , при  $\alpha \neq 0$  содержащегося в пространстве  $L_1(\Omega)$ , определяется явным видом функции  $g$ . Нетрудно также видеть, что задача

$$\inf_{v \in V} J(v)$$

является задачей минимизации недифференцируемого функционала.

Определим множество

$$K^* = \{y \in L_{\infty}(\Omega) \mid |y(x)| \leq 1 \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} |v| dx = \sup_{y \in K^*} \int_{\Omega} yv dx.$$

Следовательно, в данном случае

$$L(v, y) = \int_{\Omega} (g(v, \nabla v) + \alpha yv) dx.$$

### Алгоритм Удзавы

Рассмотрим один из известных методов отыскания седловых точек на примере, охватывающем много важных приложений.

Пусть  $V$  и  $Y$  — гильбертовы пространства, скалярные произведения в которых будем обозначать  $(\cdot, \cdot)$  и  $((\cdot, \cdot))$  и нормы —  $\|\cdot\|_V$  и  $\|\cdot\|_Y$ , соответственно. Пусть также  $K \subset V$  и  $\Lambda \subset Y$  — выпуклые, замкнутые, непустые множества.

Рассмотрим функционал

$$\hat{J}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + \sup_{y \in \Lambda} ((y, \Phi(v))),$$

где

$$a(v, v) = (Av, v),$$

$A : V \rightarrow V$  — некоторый линейный оператор, удовлетворяющий неравенству

$$(Av, v) \geq C_1 \|v\|_V^2, \quad C_1 > 0, \quad \forall v \in V, \quad (1.46)$$

а функция  $\Phi : V \rightarrow Y$  в общем случае нелинейная. Мы предполагаем, что она является липшицевой с константой  $C$ , т.е.

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_Y \leq C\|u - v\|_V, \quad \forall u, v \in K. \quad (1.47)$$

Для того чтобы гарантировать существование элемента  $u$ , минимизирующего на множестве  $K$  функционал  $\hat{J}(v)$ , достаточно предположить, что функция

$$v \rightarrow ((y, \Phi(v)))$$

выпукла и полунепрерывна снизу при любом  $y$ . В этом случае функция

$$v \rightarrow \sup_{y \in \Lambda} ((y, \Phi(v)))$$

выпукла и полунепрерывна снизу как верхняя грань выпуклых и полунепрерывных снизу функций и, следовательно, слабо полунепрерывна снизу. Поэтому решение задачи: найти элемент  $u \in K$  такой, что

$$\hat{J}(u) = \inf_{v \in K} \hat{J}(v),$$

существует.

Эту задачу можно представить в следующем виде:

$$\inf_{v \in K} \sup_{y \in \Lambda} L(v, y), \quad \text{где } L(v, y) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + ((y, \Phi(v))). \quad (1.48)$$

Предположим, что седловая точка  $(u, p)$  лагранжиана  $L(v, y)$  существует. Опишем *алгоритм Удзавы*, применяющийся для ее нахождения. Зададим элемент  $p_0 \in \Lambda$  и построим последовательность  $(u_n, p_n)$  по следующему правилу:

1. Зная  $p_n \in \Lambda$ , определим  $u_n \in K$  из условия

$$L(u_n, p_n) \leq L(v, p_n), \quad \forall v \in K.$$

2. Далее определим  $p_{n+1}$  по правилу

$$p_{n+1} = \Pi_\Lambda(p_n + \rho_n \Phi(u_n)),$$

где  $\Pi_\Lambda : Y \rightarrow \Lambda$  — оператор проектирования на множество  $\Lambda$ , а  $\rho_n$  — некоторый числовой параметр.

ТЕОРЕМА 1.8. При сформулированных выше условиях если параметры алгоритма Удзавы выбраны так, что они удовлетворяют с некоторыми положительными  $\alpha$  и  $\Theta$  при любом  $n$  неравенствам

$$\begin{aligned}\rho_n &\geq \alpha > 0; \\ 2C_1\rho_n - C^2\rho_n^2 &\geq \Theta > 0,\end{aligned}\tag{1.49}$$

то

$$\|u_n - u\|_V \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u$  — первая компонента седловой точки, тогда с учетом обозначения (1.4) имеем

$$J(u) + ((p, \Phi(u))) \leq J(v) + ((p, \Phi(v))), \quad \forall v \in K.$$

Это означает, что элемент  $u$  является минимайзером вариационной задачи для функционала, стоящего в правой части этого неравенства. Запишем соответствующее вариационное неравенство:

$$(J'(u), v - u) \geq ((p, \Phi(u) - \Phi(v))), \quad \forall v \in K.\tag{1.50}$$

Аналогично из условия, что элемент  $u_n$  минимизирует на множестве  $K$  функционал

$$J(v) + ((p_n, \Phi(v))),$$

следует оценка

$$(J'(u_n), v - u_n) \geq ((p_n, \Phi(u_n) - \Phi(v))).\tag{1.51}$$

Положим в (1.50)  $v = u_n$ , а в (1.51)  $v = u$  и сложим эти неравенства. В результате получим

$$(J'(u) - J'(u_n), u_n - u) \geq ((p_n - p, \Phi(u_n) - \Phi(u))).$$

Поскольку

$$(J'(u), u_n - u) = (Au - f, u_n - u),$$

то

$$(A(u - u_n), u_n - u) \geq ((p_n - p, \Phi(u_n) - \Phi(u))).\tag{1.52}$$

Обозначив  $r_n = p_n - p$ , имеем вместо неравенства (1.52) неравенство

$$((r_n, \Phi(u_n) - \Phi(u))) \leq -(A(u_n - u), u_n - u).$$

Следовательно,

$$((r_n, \Phi(u_n) - \Phi(u))) \leq -C_1\|u_n - u\|_V^2.\tag{1.53}$$

Покажем, что

$$p = \Pi_{\Lambda}(p + \rho\Phi(u)) \quad \text{при } \forall \rho > 0. \quad (1.54)$$

Рассмотрим другое неравенство, справедливое для седловой точки

$$J(u) + ((p, \Phi(u))) \geq J(u) + ((y, \Phi(u))), \quad \forall y \in \Lambda,$$

т.е.

$$((p - y, \Phi(u))) \geq 0, \quad \forall y \in \Lambda.$$

При  $\rho > 0$  справедливо неравенство

$$\|p - y\|_Y^2 + 2\rho ((p - y, \Phi(u))) \geq 0, \quad \forall y \in \Lambda,$$

или, что эквивалентно,

$$\|p - (y + \rho\Phi(u))\|_Y^2 \geq \|\rho\Phi(u)\|_Y^2 = \|p - (p + \rho\Phi(u))\|_Y^2, \quad \forall y \in \Lambda.$$

Отсюда следует (1.54).

Рассмотрим последовательность

$$r_{n+1} = p_{n+1} - p = \Pi_{\Lambda}(p_n + \rho_n\Phi(u_n)) - \Pi_{\Lambda}(p + \rho_n\Phi(u)).$$

Поскольку оператор проектирования  $\Pi_{\Lambda}$  — нерастягивающий, то

$$\begin{aligned} \|r_{n+1}\|_Y^2 &\leq \|p_n - p + \rho_n(\Phi(u_n) - \Phi(u))\|_Y^2 \leq \|p_n - p\|_Y^2 + \\ &\quad + 2\rho_n((p_n - p, \Phi(u_n) - \Phi(u))) + \rho_n^2\|\Phi(u_n) - \Phi(u)\|_Y^2. \end{aligned}$$

Учитывая (1.47) и (1.53), получим

$$\begin{aligned} \|r_{n+1}\|_Y^2 &\leq \|r_n\|_Y^2 - 2C_1\rho_n\|u_n - u\|_V^2 + \\ &\quad + \rho_n^2C^2\|u_n - u\|_V^2 = \|r_n\|_Y^2 - (2C_1\rho_n - C^2\rho_n^2)\|u_n - u\|_V^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и условия (1.49) следует, что

$$\|r_{n+1}\|_Y^2 + \Theta\|u_n - u\|_V^2 \leq \|r_n\|_Y^2.$$

Последнее неравенство показывает, что последовательность  $\|r_n\|_Y$  монотонно убывает. Поскольку она ограничена снизу, то у нее существует некоторый неотрицательный предел и

$$\Theta\|u_n - u\|_V^2 \leq \|r_n\|_Y^2 - \|r_{n+1}\|_Y^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана. □

## 1.6. Проксимационный метод

Основным недостатком методов регуляризации и штрафа является то, что при стремлении к нулю параметров регуляризации и штрафа соответствующие задачи становятся все более трудными с вычислительной точки зрения. Поэтому утверждение типа “при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $u_\varepsilon$  стремится к точному решению  $u$ ” следует воспринимать как чисто теоретический математический результат. На практике при малых  $\varepsilon$  регуляризованная задача может иметь столь большую обусловленность, что найти  $u_\varepsilon$  на практике не представляется возможным.

Методы двойственности лишены этого недостатка. Однако их использование требует значительно большего объема вычислительной работы, поскольку вместе с исходной функцией  $u$  разыскивается также и двойственная —  $p$ . Сходимость этих методов, как правило, достаточно медленная. Кроме того, алгоритмы, подобные алгоритму Удзавы, применимы не к любым лагранжианам, что ограничивает круг задач, к которым могут быть применены методы теории двойственности. Поэтому оказывается весьма полезным так называемый *проксимационный метод*, который был предложен в работе [19].

### Отображение прох

Пусть  $V$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ , а  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторый выпуклый и полунепрерывный снизу функционал. Тогда функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}(v - u, v - u) + \phi(v) \quad (1.55)$$

является на  $V$  строго выпуклым и полунепрерывным снизу. Этот функционал коэрцитивен на  $V$ , поэтому решение следующей задачи: найти такой элемент  $u_\phi \in V$ , что

$$F(u_\phi) = \inf_{v \in V} F(v),$$

существует и единственно при любом  $u$ . Тем самым определено отображение, называемое прох

$$u_\phi = \text{прох}_\phi u, \quad \text{прох}_\phi : V \rightarrow V. \quad (1.56)$$

Если  $\phi(v)$  — характеристическая функция выпуклого множества  $K$ , т.е.

$$\phi(v) = \begin{cases} 0 & , v \in K; \\ +\infty & , v \notin K, \end{cases}$$

то  $\text{прох}_\phi$  совпадает с обычной проекцией на множество  $K$ .

## Алгоритм прох-метода

Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf_{v \in K} J(v), \quad (1.57)$$

где  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый непрерывный и коэрцитивный на  $V$  функционал, а  $K \subset V$  — выпуклое замкнутое непустое множество.

Пусть  $A_k : V \rightarrow V$  — последовательность линейных операторов таких, что

$$(A_k v, v) \geq C_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in V; \quad (1.58)$$

$$\|A_k\| \leq C_2; \quad (1.59)$$

причем постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $k$ . В простейшем случае можно положить  $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_k = \dots = A$ .

Рассмотрим последовательность функционалов

$$F_k(w, v) = (A_k(w - v), w - v) + J(w).$$

В проксимационном методе последовательность элементов  $\{v_k\}$   $k = 1, 2, \dots$ , сходящаяся к решению задачи (1.57), строится следующим образом:

1. Выбирается некоторый элемент  $v_0 \in K$ .
2. Последующие приближения задаются соотношением

$$v_{k+1} = \operatorname{arginf}_{w \in K} F_k(w, v_k). \quad (1.60)$$

**ТЕОРЕМА 1.9.** *При сформулированных выше предположениях и при выполнении условий (1.58) и (1.59) последовательность  $\{v_k\}$  обладает следующими свойствами:*

$$J(v_{k+1}) \leq J(v_k). \quad (1.61)$$

$$\text{Если } J(v_{k+1}) = J(v_k), \quad \text{то } J(v_k) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (1.62)$$

$$J(v_k) \rightarrow \inf_{v \in K} J(v) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.63)$$

$$\operatorname{dist}(v_k, \operatorname{arginf}_{v \in K} J(v)) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.64)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из (1.60) следует

$$F_k(v_{k+1}, v_k) \leq F_k(v_k, v_k) = J(v_k). \quad (1.65)$$

По определению функционала  $F_k$ , имеем

$$J(v_{k+1}) = F_k(v_{k+1}, v_k) - (A_k(v_k - v_{k+1}), v_k - v_{k+1}),$$

поэтому из (1.65)

$$J(v_k) - J(v_{k+1}) = J(v_k) - F_k(v_{k+1}, v_k) + (A_k(v_k - v_{k+1}), v_k - v_{k+1}) \geq C_1 \|v_k - v_{k+1}\|^2. \quad (1.66)$$

Таким образом,  $J(v_{k+1}) \leq J(v_k)$ . Если имеет место равенство, то  $v_{k+1} = v_k$ .

Покажем, что в этом случае  $v_k = v_*$ , где

$$v_* \in \operatorname{arg\,inf}_{v \in K} J(v).$$

В окрестности элемента  $v_k$  построим конус

$$C_K(v_k) = \{z \in V \mid \|z\| = 1, \exists \lambda > 0 \text{ такое, что } v_k + \lambda z \in K\}.$$

Нетрудно видеть, что элементы  $C_K(v_k)$  соответствуют направлениям из  $v_k$  “внутри” множества  $K$ .

Поскольку  $v_{k+1} = v_k$ , то ни по одному из направлений  $C_K(v_k)$  функционал  $F_k(w, v_k)$  не должен убывать, следовательно,

$$F_k(v_k, v_k) \leq F_k(v_k + \lambda z, v_k), \quad \forall z \in C_K(v_k),$$

где  $\lambda$  выбрано так, что  $v_k + \lambda z \in K$ . Отсюда

$$J(v_k) \leq J(v_k + \lambda z) + \lambda^2 (A_k z, z). \quad (1.67)$$

Предположим, что  $v_k \neq v_*$ , выберем тогда

$$\lambda_0 = \|v_* - v_k\|, \quad z = \frac{v_* - v_k}{\lambda_0},$$

и рассмотрим элемент

$$v_k + \lambda z = v_k + \frac{\lambda}{\lambda_0} (v_* - v_k) = \frac{\lambda}{\lambda_0} v_* + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) v_k.$$

Очевидно, что при  $\lambda < \lambda_0$  элемент  $v_k + \lambda z$  принадлежит множеству  $K$ . Используя выпуклость функционала  $J$ , получаем

$$J(v_k + \lambda z) \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) J(v_k) + \frac{\lambda}{\lambda_0} J(v_*).$$

Теперь из (1.67) следует, что

$$J(v_k) \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) J(v_k) + \frac{\lambda}{\lambda_0} J(v_*) + \lambda^2 (A_k z, z),$$

т.е.

$$\lambda (A_k z, z) \geq \frac{1}{\lambda_0} (J(v_k) - J(v_*)), \quad \forall \lambda \leq \lambda_0. \quad (1.68)$$



По предположению правая часть (1.68) является положительным числом, т.к.  $v_k$  не минимизирует функционал  $J(v)$ , а левая часть за счет выбора  $\lambda$  может быть сделана сколь угодно малой. Приходим к противоречию, которое показывает, что  $v_k = v_{k+1} = v_*$ .

Покажем, что числовая последовательность  $J(v_k)$  сходится к  $J(v_*)$ , где

$$J(v_*) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Из (1.66) следует, что

$$J(v_k) - J(v_{k+1}) \geq C_1 \|v_{k+1} - v_k\|^2;$$

$$J(v_{k+1}) - J(v_{k+2}) \geq C_1 \|v_{k+2} - v_{k+1}\|^2.$$

Из неравенства

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

и неравенства треугольника следует оценка

$$J(v_k) - J(v_{k+2}) \geq \frac{C_1}{2} \|v_{k+2} - v_k\|^2,$$

используя которую вместе с неравенством

$$J(v_{k+2}) - J(v_{k+3}) \geq C_1 \|v_{k+3} - v_{k+2}\|^2 \geq \frac{C_1}{2} \|v_{k+3} - v_{k+2}\|^2,$$

получаем

$$J(v_k) - J(v_{k+3}) \geq \frac{C_1}{4} \|v_{k+3} - v_k\|^2.$$

Неравенства такого типа можно записать для разности  $J(v_k)$  и  $J(v_{k+m})$  при всех натуральных  $m$ , а именно

$$J(v_k) - J(v_{k+m}) \geq \frac{C_1}{2^{m-1}} \|v_k - v_{k+m}\|^2. \quad (1.69)$$

Поскольку последовательность  $J(v_k)$  монотонно убывает и ограничена снизу, то она сходится и, следовательно, при любом  $m$

$$\|v_k - v_{k+m}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, последовательность  $\{v_k\}$  фундаментальна, и существует предел  $\hat{v} \in K$  такой, что

$$v_k \rightarrow \hat{v} \quad \text{в } V \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Покажем, что  $\hat{v} = v_*$ . Предположим обратное и рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} (A_k(v_{k+1} - v_k), v_{k+1} - v_k) + J(v_k) &\leq \\ &\leq (A_k(w - v_k), w - v_k) + J(w), \quad \forall w \in K, \end{aligned} \quad (1.70)$$

которое определяет элемент  $v_{k+1}$ . Используя неравенство

$$(A_k(w - v_k), w - v_k) \leq \|A_k(w - v_k)\| \|w - v_k\| \leq C_2 \|w - v_k\|^2$$

в (1.70) и переходя к пределу, получим

$$J(\hat{v}) \leq C_2 \|w - \hat{v}\|^2 + J(w), \quad \forall w \in K. \quad (1.71)$$

Положим  $w = (1 - \mu)\hat{v} + \mu v_*$ ,  $\forall \mu \in (0, 1)$ , тогда

$$w - \hat{v} = \mu(v_* - \hat{v});$$

$$J(w) \leq (1 - \mu)J(\hat{v}) + \mu J(v_*);$$

$$\mu(J(\hat{v}) - J(v_*)) \leq C_2 \mu^2 \|\hat{v} - v_*\|^2.$$

В силу предположения, что  $\hat{v}$  не совпадает с элементом  $v_*$ , на котором достигается точная нижняя грань,  $J(\hat{v}) - J(v_*)$  — положительное число, и при этом

$$J(\hat{v}) - J(v_*) \leq \mu C_2 \|\hat{v} - v_*\|^2.$$

Выбором достаточно малого  $\mu$  мы всегда можем нарушить неравенство, следовательно,  $\hat{v} = v_*$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.** Приведенный выше вариант доказательства теоремы был предложен в диссертации [15].

## 1.7. Метод последовательных приближений

### Теорема Банаха о неподвижной точке

Пусть  $(S, d)$  — полное метрическое пространство с метрикой  $d$ . Пусть  $T : S \rightarrow S$  — оператор, обладающий следующим свойством:

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in S, \quad (1.72)$$

где  $k$  — некоторое число из интервала  $(0, 1)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** Оператор  $T$ , обладающий свойством (1.72), называется *оператором сжатия*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Точка  $\bar{x}$  называется *неподвижной точкой* оператора  $T$ , если

$$\bar{x} = T(\bar{x}). \quad (1.73)$$

ТЕОРЕМА 1.10. Если  $(S, d)$  — полное метрическое пространство и  $T : S \rightarrow S$  — оператор сжатия, то существует одна и только одна неподвижная точка оператора  $T$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем единственность. Предположим, что имеются две неподвижные точки  $\hat{x}$  и  $\bar{x}$ , т.е.

$$\bar{x} = T(\bar{x}), \quad \hat{x} = T(\hat{x}),$$

причем  $\bar{x} \neq \hat{x}$ . Поскольку  $T$  — оператор сжатия, то

$$0 < d(\bar{x}, \hat{x}) = d(T(\bar{x}), T(\hat{x})) \leq kd(\bar{x}, \hat{x}).$$

Поскольку  $k < 1$ , приходим к противоречию.

Для доказательства существования неподвижной точки рассмотрим последовательность

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.74)$$

Покажем, что независимо от выбора начального приближения  $x_0$  эта последовательность сходится к неподвижной точке оператора  $T$ . Легко видеть, что

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^2(x_{n-2}) = \dots = T^n(x_0). \quad (1.75)$$

Для  $\forall n$  и  $\forall x, y \in S$  справедлива оценка

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq k^n d(x, y); \quad (1.76)$$

для  $\forall m > n$  имеем

$$T^m(x_0) = T^n(T^{m-n}(x_0)) = T^n(x_{m-n}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(T^n(x_0), T^m(x_0)) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq k^n (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}) = \\ &= k^n d(x_0, x_1) \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $\forall m > n$ . Поскольку  $(S, d)$  — полное метрическое пространство, а  $\{x_n\}$  — фундаментальная

последовательность, существует предел этой последовательности  $x_*$ , т.е.  $x_n \rightarrow x_*$  при  $n \rightarrow \infty$  в метрике  $d$ .

Заметим, что в силу (1.72) оператор  $T$  является непрерывным. Поэтому, если  $y_n \rightarrow y_*$  при  $n \rightarrow \infty$  в метрике  $d$ , то

$$T(y_n) \rightarrow T(y_*).$$

Переходя к пределу в соотношении  $x_n = T(x_{n-1})$ , получаем  $x_* = T(x_*)$ , следовательно,  $x_*$  — неподвижная точка оператора  $T$ .  $\square$

### Метод последовательных приближений в общей форме

Пусть имеется вариационное неравенство

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K, \quad (1.77)$$

где  $V$  — гильбертово пространство, а  $K \subset V$  — выпуклое замкнутое непустое множество.

Предположим, что билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  является  $V$ -эллиптической, т.е. выполнены условия (1.2) и (1.3). Тогда, согласно лемме (теореме) Лакса–Мильграма, существует линейный оператор  $A : V \rightarrow V$  такой, что

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Определим на  $V \times V$  другую симметричную билинейную форму  $b(u, v)$ , для которой выполнено условие

$$\beta_1 \|v\|^2 \leq b(v, v) \leq \beta_2 \|v\|^2 \quad (1.78)$$

с некоторыми положительными постоянными  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Поскольку  $b(v, v)$  — симметричная квадратичная форма, удовлетворяющая (1.78), то норма  $\|\cdot\|_b$ , определяемая соотношением

$$\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)},$$

эквивалентна исходной.

Важным требованием, предъявляемым к форме  $b(\cdot, \cdot)$ , является простота решения вариационного неравенства

$$b(w, v - w) \geq (g, v - w), \quad \forall v \in K \quad (1.79)$$

для любого  $g$ . Это требование трудно формализовать. В известной степени выбор подходящей формы  $b$  зависит от опыта вычислителя. На практике часто в качестве  $b$  выбирается норма в пространстве  $V$ , умноженная на некоторый коэффициент.

Зададим элемент  $u \in K$ , тогда по теореме Рисса для любого положительного числа  $\rho$  и элемента  $u$  найдется элемент  $\hat{g}$  такой, что

$$(\hat{g}, v - w) = b(u, v - w) - \rho[a(u, v - w) - (f, v - w)].$$

Рассмотрим вариационное неравенство

$$b(w, v - w) \geq (\hat{g}, v - w), \quad \forall v \in K. \quad (1.80)$$

Решение этого неравенства существует и единственно. Поэтому мы фактически построили оператор  $T : K \rightarrow K$ , который каждому  $u$  сопоставляет элемент  $w$ , являющийся решением (1.80).

Покажем, что возможно выбрать константу  $\rho$  так, чтобы оператор  $T$  был оператором сжатия. Тогда будет построен метод численного решения вариационного неравенства (1.77).

Зададим произвольное начальное приближение  $u_0 \in K$  и построим последовательность  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , решая вариационные неравенства

$$b(u_{n+1}, v - u_{n+1}) \geq b(u_n, v - u_{n+1}) - \rho[a(u_n, v - u_{n+1}) - (f, v - u_{n+1})].$$

Рассмотрим произвольные элементы  $v_1, v_2 \in K$ . Пусть

$$w_1 = T(v_1), \quad w_2 = T(v_2).$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} b(w_1, v - w_1) &\geq b(v_1, v - w_1) - \rho[a(v_1, v - w_1) - (f, v - w_1)], \quad \forall v \in K; \\ b(w_2, v - w_2) &\geq b(v_2, v - w_2) - \rho[a(v_2, v - w_2) - (f, v - w_2)], \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Положим в первом неравенстве  $v = w_2$ , а во втором  $v = w_1$  и сложим. Получим

$$\begin{aligned} b(w_1, w_2 - w_1) + b(w_2, w_1 - w_2) &\geq b(v_1, w_2 - w_1) + b(v_2, w_1 - w_2) - \\ &- \rho[a(v_1, w_2 - w_1) - (f, w_2 - w_1) + a(v_2, w_1 - w_2) - (f, w_1 - w_2)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$-b(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geq b(v_2 - v_1, w_1 - w_2) - \rho a(v_2 - v_1, w_1 - w_2).$$

Обозначим  $v_1 - v_2 = \phi$ ,  $w_1 - w_2 = \psi$ . Тогда это неравенство приобретает вид

$$-\|\psi\|_b^2 \geq -b(\phi, \psi) + \rho a(\phi, \psi),$$

или

$$\|\psi\|_b^2 \leq (\phi, \psi)_b - \rho a(\phi, \psi) = (\phi, \psi)_b - \rho(\hat{A}\phi, \psi)_b \leq \|\psi\|_b \|(I - \rho\hat{A})\phi\|_b,$$

где  $I$  — единичный оператор, а  $\hat{A}$  — линейный оператор такой, что

$$(\hat{A}\phi, \psi)_b = a(\phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in V.$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\|\psi\|_b^2 \leq \|(I - \rho\hat{A})\phi\|_b^2.$$

Рассмотрим правую часть этого соотношения

$$\|(I - \rho\hat{A})\phi\|_b^2 = \|\phi\|_b^2 - 2\rho(\hat{A}\phi, \phi)_b + \rho^2\|\hat{A}\phi\|_b^2,$$

где

$$\|\hat{A}\phi\|_b \leq \|\hat{A}\|\|\phi\|_b$$

и (см. (1.2))

$$(\hat{A}\phi, \phi)_b = a(\phi, \phi) \geq C_1\|\phi\|^2.$$

Поскольку

$$\|\phi\|_b^2 = b(\phi, \phi) \leq \beta_2\|\phi\|^2,$$

то

$$\|\phi\|^2 \geq \frac{1}{\beta_2}\|\phi\|_b^2.$$

Следовательно,

$$(\hat{A}\phi, \phi)_b \geq \frac{C_1}{\beta_2}\|\phi\|_b^2.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \|\psi\|_b^2 &\leq \|\phi\|_b^2 + \rho^2\|\hat{A}\|^2\|\phi\|_b^2 - 2\rho\frac{C_1}{\beta_2}\|\phi\|_b^2; \\ \|\psi\|_b &\leq \|\phi\|_b \sqrt{1 + \rho^2\|\hat{A}\|^2 - 2\rho\frac{C_1}{\beta_2}}. \end{aligned}$$

Если положительную константу  $\rho$  выбрать так, чтобы выражение под корнем было меньше единицы, то получим

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|_b \leq k\|v_1 - v_2\|_b, \quad k < 1,$$

где

$$k^2 = 1 + \rho^2\|\hat{A}\|^2 - 2\rho\frac{C_1}{\beta_2}.$$

Следовательно, оператор  $T$  является оператором сжатия. Соответствующее условие имеет вид

$$1 + \rho^2 \|\hat{A}\|^2 - 2\rho \frac{C_1}{\beta_2} < 1,$$

или

$$\rho < \frac{2C_1}{\|\hat{A}\|^2 \beta_2}. \quad (1.81)$$

Таким образом, для выбора  $\rho$  помимо констант  $C_1, \beta_2$  надо иметь оценку сверху нормы оператора  $\hat{A}$ .

Пример. Рассмотрим простой, но важный с точки зрения приложений случай, когда

$$b(u, v) = \beta(u, v), \quad \text{где } \beta > 0.$$

В этом случае задача (1.79) отыскания решения вариационного неравенства

$$\beta(w, v - w) \geq (g, v - w), \quad \forall v \in K$$

эквивалентна задаче поиска минимума функционала

$$J(v) = \frac{\beta}{2} \|v\|^2 - (g, v) \quad (1.82)$$

на множестве  $K$ .

Преобразуем функционал следующим образом:

$$J(v) = \frac{\beta}{2}(v, v) - (g, v) + \frac{1}{2\beta}(g, g) - \frac{1}{2\beta}(g, g) = \frac{\beta}{2} \|v - \frac{1}{\beta}g\|^2 + C,$$

где

$$C = -\frac{1}{2\beta}(g, g).$$

Отсюда следует, что решение  $u$  задачи (1.82) определяется при помощи проекции элемента  $g/\beta$  на множество  $K$ , т.е.

$$u = \Pi_K \left[ \frac{g}{\beta} \right].$$

Рассмотрим вариационное неравенство, лежащее в основе метода последовательных приближений

$$\begin{aligned} \beta(u_{n+1}, v - u_{n+1}) &\geq \beta(u_n, v - u_{n+1}) - \\ &- \rho [a(u_n, v - u_{n+1}) - (f, v - u_{n+1})] = \\ &= (\beta u_n - \rho(Au_n - f), v - u_{n+1}). \end{aligned}$$

Следовательно,  $g = \beta u_n - \rho(Au_n - f)$ , и приближение  $u_{n+1}$  определяется в соответствии с правилом

$$u_{n+1} = \Pi_K \left[ u_n - \frac{\rho}{\beta}(Au_n - f) \right]. \quad (1.83)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если  $K$  совпадает с  $V$ , то формула (1.83) фактически является формулой метода градиентного спуска в задаче

$$\min_{u \in V} \left( \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u) \right).$$



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Цель данной главы заключается в том, чтобы проиллюстрировать применение изложенного ранее в абстрактной форме математического аппарата к конкретным задачам, возникающим в приложениях, а именно, к задачам деформационной теории пластичности.

## 2.1. Физические основы пластичности

Представление о поведении материала при деформировании дают опыты по растяжению цилиндрических образцов под действием возрастающей силы, которые подробно описаны в литературе (см., например, [5], [8], [9], [13]). Их результаты принято изображать в виде приведенных на рис. 2.1 диаграмм “напряжения-деформации”, соответствующих случаю мягких *a* и закаленных *b* сталей. Ограничимся описанием наиболее общих особенностей процесса изменения свойств металлов при деформировании. Эти особенности отражены на диаграммах 2.1.

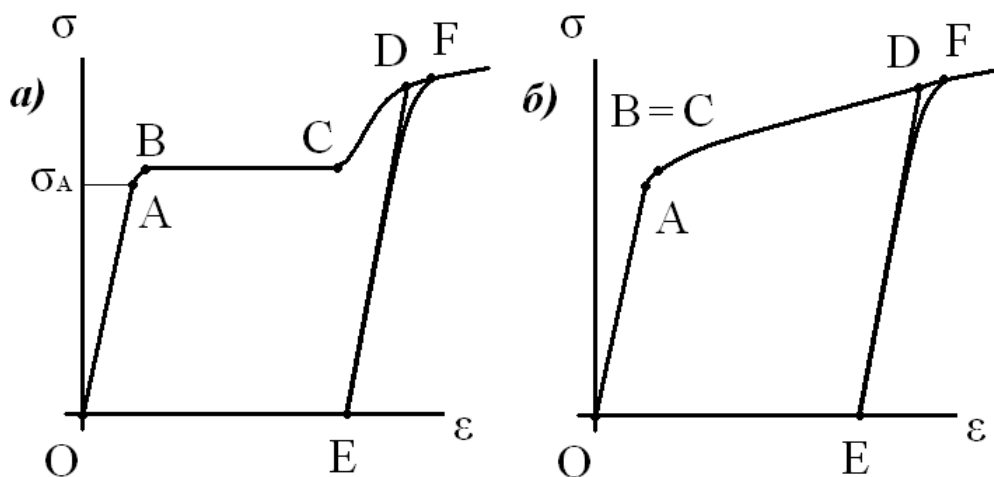


Рис. 2.1. Диаграмма “напряжение-деформация”: *a* – мягкая сталь;  
*б* – закаленная сталь

Пусть точка *O* соответствует ненапряженному состоянию тела. При малых растяжениях возникающие деформации — упругие, т.е. обратимые (участок *OA*). Они исчезают при снятии нагрузки. На этом участке

выполняется закон Гука, т.е. связь между напряжениями и деформациями линейна. Напряжение  $\sigma_A$ , соответствующее точке А на диаграмме, называется *пределом пропорциональности*. За ним следует небольшой участок АВ, на котором материал остается упругим, но уже становится нелинейным. Начиная от точки А угол наклона кривой становится меньше, чем на начальном участке. Моменту появления первых пластических (остаточных) деформации соответствует точка В. Напряжение  $\sigma_B$ , при котором это происходит, называется *пределом текучести* материала (предел текучести  $\sigma_B$  не отмечен на графиках, но это может быть сделано по аналогии). Для одних металлов далее может следовать ярко выраженная площадка текучести ВС — горизонтальный участок, на котором напряжение при росте деформации остается постоянным. Для других металлов такой площадки нет, и за предел текучести принимается точка возникновения первых пластических деформаций. Очень часто в силу малости участка АВ предел пропорциональности фактически отождествляется с пределом текучести.

Дальнейший участок CD соответствует *упрочнению* материала. Если на нем произвести снятие нагрузки (*разгрузку*), то при этом новых пластических деформаций возникать не будет, а сама разгрузка пройдет по участку DE, практически параллельному OA. Деформации, которые не исчезнут при возвращении тела в ненапряженное состояние, как раз и будут являться теми остаточными (пластическими) деформациями, которые материал накопил на участке BD. Если повторно нагрузить материал (участок EF), то кривая практически совпадет с кривой разгрузки DE и при переходе за точку F пойдет так, будто никакой предшествующей разгрузки не происходило. Оказывается, что при этом предел упругого поведения материала вырос до значения  $\sigma_D$ . Материал стал прочнее на растяжение, отсюда и термин “упрочнение”. При дальнейшем нагружении происходит разрушение образца.

Приведенная выше схема лишь в общих чертах соответствует реальному поведению металлов (тем более — материалов с принципиально иными свойствами). Как уже говорилось, предел пропорциональности незначительно, но отличается от предела текучести. Эксперименты указывают, что закон разгрузки не всегда линейен и участок DE может быть не параллелен участку OA. Хорошо известен так называемый эффект Баушингера, когда упрочнение материала на растяжение сопровождается уменьшением предела текучести на сжатие (разупрочнением). Также имеет место влияние скорости деформации на процесс возникновения пластических деформации и упрочнения. Известно, что в широком

диапазоне скоростей для металлов оно незначительно и можно считать процесс деформирования квазистатическим. С увеличением скорости деформации сопротивление ей со стороны материала растет, предел текучести увеличивается. В реальности наблюдаются и более сложные явления, такие как, например, *ползучесть*, которая в металлах особенно проявляется при высоких температурах. Поэтому при обсуждении той или иной математической модели теории пластичности какой-то частью особенностей поведения материала приходится пренебрегать.

## 2.2. Идеальная пластичность

Пожалуй, наиболее простыми и хорошо исследованными моделями теории пластичности являются следующие: идеально упругопластическая среда (рис. 2.2, *а*), упругопластическая среда с линейным упрочнением (рис. 2.2, *б*) и жесткопластическая среда (рис. 2.2, *в*). Поясним их особенности на примере простого растяжения образца.

В первом случае до достижения напряжением предела текучести  $k_*$  тело деформируется упруго, связь между напряжением и деформацией линейна, а после — пластические деформации появляются и нарастают при постоянном напряжении. Материал, таким образом, не упрочняется.

Для материала с линейным упрочнением нет площадки текучести. В этом случае за  $k_*$  принимают то значение напряжения  $\sigma$ , при котором происходят первые пластические деформации и начинается упрочнение материала. Это значение соответствует точке перехода одного линейного участка диаграммы в другой.

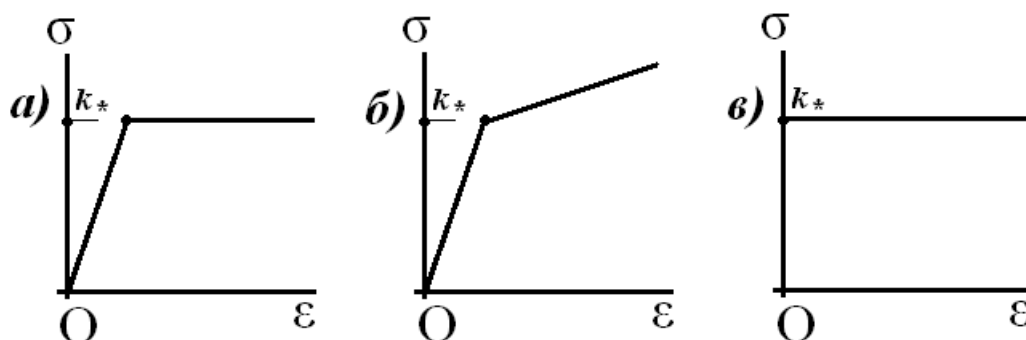


Рис. 2.2. Диаграмма “напряжение-деформация”: *а* — идеально упругопластическая среда; *б* — упругопластическая среда с линейным упрочнением; *в* — жесткопластическая среда

В случае жесткопластической среды наклонный участок отсутствует. Возникающие до состояния текучести упругие деформации пренебрежимо малы, а все допустимые состояния соответствуют точкам горизонтального участка  $\sigma = k_*$ ,  $\varepsilon \geq 0$ .

При построении математической теории пластичности предполагается, что полная деформация  $\varepsilon$  в любой момент времени представляет собой сумму упругой  $\varepsilon^e$  и пластической  $\varepsilon^p$  составляющих. Таким образом, для случая жесткопластического тела имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon^p = 0, & \quad \text{если } \sigma < k_*; \\ \varepsilon = \varepsilon^p > 0, & \quad \text{если } \sigma = k_*.\end{aligned}$$

Покажем на примере идеально упругопластического тела, как физические представления о его свойствах приводят к определяющим соотношениям в виде вариационных неравенств (см., например, [11]). Рассмотрим случай активного нагружения (нагружения без разгрузок) образца в эксперименте на чистое растяжение. Предположим, что пластическая деформация возрастает пропорционально времени  $t$  с коэффициентом пропорциональности  $\lambda$ . Пусть текущее значение растягивающего напряжения  $\sigma$  меньше предела текучести  $k_*$ . Тогда приращение полной продольной деформации  $d\varepsilon$  будет равно приращению упругой составляющей  $d\varepsilon^e$ , которое связано с приращением напряжения  $d\sigma$  линейным соотношением, т.е.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{1}{E}d\sigma, \quad d\varepsilon^p = 0, \quad \text{если } \sigma < k_*,$$

где  $E$  — модуль упругости. При  $\sigma = k_*$  полная деформация будет возрастать только за счет приращения пластической. Напряжение будет оставаться постоянным. Таким образом,

$$d\varepsilon = d\varepsilon^p = \lambda dt, \quad d\varepsilon^e = 0, \quad d\sigma = 0, \quad \text{если } \sigma = k_*.$$

Объединяя все соотношения, получим

$$d\varepsilon = \frac{1}{E}d\sigma + \lambda dt,$$

где

$$\begin{aligned}\lambda = 0, \quad d\sigma > 0 & \quad \text{при } \sigma < k_*; \\ \lambda \geq 0, \quad d\sigma = 0 & \quad \text{при } \sigma = k_*.\end{aligned}$$

Поделив на  $dt$  и устремив  $dt$  к нулю, получим

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p,$$

где  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}/E$  и  $\dot{\varepsilon}^p = \lambda$  — скорости полной, упругой и пластической деформации, соответственно. Соотношения, которым должна удовлетворять скорость пластической деформации  $\lambda$ , можно записать в виде неравенства

$$\lambda(\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \leq k_*. \quad (2.1)$$

Из этого неравенства следует, что если напряжение  $\sigma$  не достигло значения  $k_*$ , то скорость пластической деформации  $\lambda$  равна нулю, а если достигло — величина  $\lambda$  не может быть отрицательной.

### 2.3. Поверхность текучести

Рассмотренный в разделе 2.2 пример относится к числу примеров простого напряженного состояния. В случае сложного напряженного состояния, возникающего как результат комплекса внешних воздействий на тело, для описания условий возникновения пластичности необходимо обобщение полученных ранее неравенств типа (2.1) и других. Это делается посредством введения *функции текучести (функции нагружения)*  $\mathcal{F}: \mathbb{M}_s^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\mathbb{M}_s^{n \times n}$  — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности  $n$  ( $n = 2, 3$ ).

В идеальных упругопластических средах напряжения в каждой точке сплошной среды не могут принимать произвольные значения (здесь речь идет уже о компонентах тензора напряжений). Напряжения считаются допустимыми, если они удовлетворяют условию

$$\mathcal{F}(\sigma) \leq 0. \quad (2.2)$$

Поверхности  $\mathcal{F}(\sigma) = 0$  в конечномерном пространстве напряжений называются *поверхностями текучести* или *поверхностями нагружения* (см., например, [8], [9], [10] и цитируемую там литературу). Любое напряженное состояние, соответствующее точке внутри поверхности текучести, может быть достигнуто чисто упругими деформациями. Пластические деформации возникают только при выходе на поверхность текучести. Изменение формы поверхности текучести связано с упрочнением. Таким образом, в случае идеальной пластичности она остается постоянной. Та часть области, занимаемой телом, где  $\mathcal{F}(\sigma) < 0$ , называется *упругой*; другая часть, для которой  $\mathcal{F}(\sigma) = 0$ , — *пластической*.

Для изотропных тел функция  $\mathcal{F}(\sigma)$ , отражающая физические свойства среды и, следовательно, независимая от ориентации системы координат, может зависеть только от трех главных инвариантов тензора  $\sigma$ .

Эти инварианты — суть коэффициенты характеристического многочлена тензора  $\sigma$

$$\det(\sigma - a \mathbb{I}) = 0,$$

определяемые по формулам

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \text{tr } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(\sigma) &= \frac{1}{2} ((\text{tr } \sigma)^2 - \text{tr } \sigma^2) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(\sigma) &= \det(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \end{aligned}$$

где  $\mathbb{I}$  обозначает единичный тензор размерности  $n$ ;  $\text{tr } \sigma$  — след тензора  $\sigma$ , а  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — собственные значения тензора, называемые *главными напряжениями*. Таким образом, функцию текучести можно представить в виде

$$\mathcal{F}(\sigma) = f(I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma)) - k_*,$$

где  $k_*$  — константа, связанная с пределом текучести материала.

Во многих случаях влияние среднего напряжения  $\bar{\sigma} = \frac{1}{n} \text{tr } \sigma$  на возникновение пластичности пренебрежимо мало. Эксперименты показывают, что так можно считать при анализе пластических деформаций для большинства металлов при обычных условиях. Тогда, используя ортогональное разложение тензора напряжений на девиаторную и шаровую части

$$\sigma = \sigma^D + \bar{\sigma} \mathbb{I}, \quad (2.3)$$

получаем

$$f = f(I_2(\sigma^D), I_3(\sigma^D)), \quad (2.4)$$

т.е. по сути дела условие текучести зависит только от разности главных напряжений. При использовании зависимости (2.4) поверхность текучести, если ее рассматривать в пространстве главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , всегда будет иметь вид цилиндра, ось которого — прямая  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .

Эта прямая перпендикулярна к девиаторной плоскости — плоскости, содержащей такие точки  $\sigma$ , для которых  $\bar{\sigma} = 0$ , и наклоненной под одинаковым углом ко всем трем осям. Отметим, что для любого тензора  $\sigma$  девиатор  $\sigma^D$  попадает на эту плоскость, поскольку след девиатора равен нулю. Поэтому удобно рисовать проекцию поверхности текучести на эту плоскость. Ею будет выпуклая кривая, не содержащая начало координат. В случае, если материал обладает одинаковыми свойствами при

растяжении-сжатии, то кривая будет обладать определенной симметрией (см. рис. 2.3, где оси  $\sigma'_i$  — это проекции осей  $\sigma_i$  пространства главных напряжений на девиаторную плоскость,  $i = 1, 2, 3$ ).

Опишем два простых условия, характеризующих переход за предел упругости при сложном напряженном состоянии. Такие условия называются *условиями текучести* или *условиями пластичности*, поскольку они должны выполняться при возникновении и развитии пластических деформаций. Первое из условий предложил французский инженер Треска. В результате серии опытов он выдвинул предположение, что во всех точках среды в состоянии пластического течения максимум касательных напряжений имеет одно и то же значение, связанное с пределом текучести материала на чистое растяжение. Позднее Сен-Венан сформулировал эти условия в виде неравенств, в пространственном случае имеющих вид

$$\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sqrt{3}k_*; \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sqrt{3}k_*; \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_2 - \sigma_1| \leq \sqrt{3}k_*, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  — *главные касательные напряжения*. Причем в упругом состоянии все соотношения (2.5) должны быть выполнены со знаком строгого неравенства, а в пластическом одно или два соотношения (2.5) выполняются со знаком равенства (очевидно, что все три соотношения не могут выполняться со знаком равенства одновременно).

Представим геометрически условие Треска–Сен-Венана (рис. 2.3, *a*). Та область, которую в этом случае отсекает на девиаторной плоскости поверхность текучести, представляет собой правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиуса  $\sqrt{2}k_*$ .

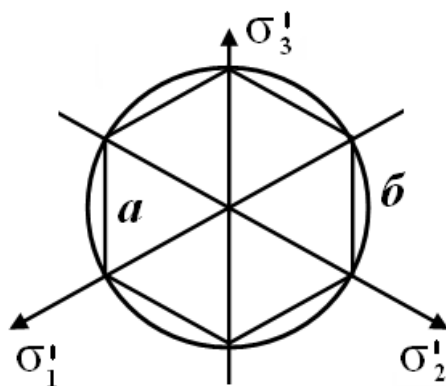


Рис. 2.3. Сечение поверхности текучести девиаторной плоскостью: *a* — условие Треска–Сен-Венана; *б* — условие Мизеса

Близким к первому, но более удобным с практической точки зрения является условие Мизеса

$$|\sigma^D| \leq \sqrt{2} k_*, \quad \text{где } |\sigma^D|^2 = \sigma^D : \sigma^D. \quad (2.6)$$

В главных напряжениях это условие имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq 6k_*^2.$$

Геометрически условие Мизеса (рис. 2.3, б) интерпретируется аналогично условию Треска–Сен-Венана. Та область, которую в этом случае отсекает на девиаторной плоскости поверхность текучести как раз и будет круг радиуса  $\sqrt{2} k_*$ , внутрь которого вписан исходный шестиугольник. Хорошо известно, что хотя это условие выглядит как некоторая аппроксимация условия Треска–Сен-Венана, оно имеет независимое практическое значение и во многих случаях находится в большем соответствии с экспериментом.

Континуальные модели, описывающие поведение горных пород, сыпучих и гранулированных сред, требуют учета влияния первого инварианта тензора напряжений, поскольку в этих средах свойства среды существенно зависят от величины давления. В этом случае возникает необходимость анализировать условия текучести вида

$$|\sigma^D| + g(\text{tr } \sigma) \leq \sqrt{2} k_*. \quad (2.7)$$

Эти соотношения принято называть условиями Шлейхера–Мора. Важным частным случаем является

$$g(\text{tr } \sigma) = c_0 \text{tr } \sigma, \quad \text{где } c_0 \geq 0. \quad (2.8)$$

Эта функция соответствует поверхности текучести в виде конуса (соответствующее условие текучести называют обобщенным условием Кулона–Мора, условием Друккера–Прагера или условием Боткина–Мизеса). Отметим, что поверхность текучести не пересекает отрицательную полуось  $\text{tr } \sigma$ . Это соответствует экспериментальным фактам, указывающим на то, что при всестороннем сжатии пластических эффектов, как правило, не наблюдается.

## 2.4. Полная система уравнений теории идеальной пластичности

Запишем систему определяющих уравнений идеального упругопластического тела. Одним из основных постулатов теории пластичности является постулат о представлении полной деформации в виде суммы



упругой и пластической составляющих. Поэтому скорость полной деформации равна

$$\dot{\epsilon}(u) = \underbrace{A\dot{\sigma}}_{\text{скорость упругой деформации}} + \underbrace{\lambda}_{\text{скорость пластической деформации}}, \quad (2.9)$$

где  $u$  — вектор перемещений;  $\sigma$  — тензор напряжений, а  $A$  — тензор модулей податливости (обратный к тензору упругих модулей). Скорость  $\lambda$ , таким образом, представляет собой разность между скоростью полной деформации и скоростью упругой деформации (подчиняющейся закону Гука). Составляющая  $\lambda$  обусловлена пластическими свойствами среды и называется скоростью пластической деформации.

Вторым постулатом, который часто кладут в основу математической теории пластичности, является физический *постулат Друккера* (в некоторой литературе — Друкер или Дракер; см., например, [6], [9], [10], [11]). Следствиями этого постулата являются утверждения о том, что поверхность текучести выпукла и вектор скорости пластической деформации в данной точке поверхности текучести направлен по внешней нормали к ней (рис. 2.4).

Математически эти два условия записываются в виде неравенства

$$\lambda : (\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{M}_s^{n \times n}, \quad \mathcal{F}(\tau) \leq 0. \quad (2.10)$$

Геометрически это неравенство означает, что вектор скорости пластической деформации образует неострый угол с вектором  $\tau - \sigma$ , где  $\sigma$  — рассматриваемое напряженное состояние на поверхности текучести, а  $\tau$  есть произвольное допустимое (т.е. лежащее внутри или на поверхности текучести) напряженное состояние.

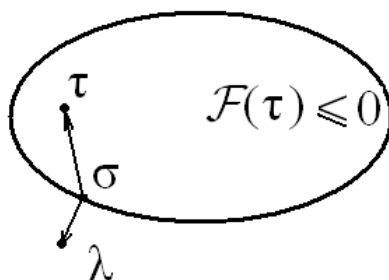


Рис. 2.4. Поверхность текучести и направление скорости пластической деформации

Итак, выпишем полную систему уравнений, описывающих движение упругопластической среды в случае малых деформаций. Пусть  $\Omega$  — исходная область, занимаемая средой,  $\partial_1\Omega$  и  $\partial_2\Omega$  — части ее границы, на

которых заданы условия в перемещениях и напряжениях, соответственно. Тогда имеем систему

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma + f \quad \text{в } \Omega; \quad (2.11)$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T); \quad (2.12)$$

$$\dot{\varepsilon}(u) = A\dot{\sigma} + \lambda, \quad \mathcal{F}(\sigma) \leq 0; \quad (2.13)$$

$$\lambda : (\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{M}_s^{n \times n}, \quad \mathcal{F}(\tau) \leq 0; \quad (2.14)$$

$$u = u_0 \quad \text{на } \partial_1 \Omega; \quad (2.15)$$

$$\sigma \nu = F \quad \text{на } \partial_2 \Omega; \quad (2.16)$$

$$\sigma|_{t=0} = \hat{\sigma}; \quad (2.17)$$

$$u|_{t=0} = \hat{u}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \hat{\dot{u}}, \quad (2.18)$$

где  $\rho$  — плотность среды;  $f$  — объемные силы;  $u_0$  — заданные на  $\partial_1 \Omega$  перемещения;  $F$  — заданные на  $\partial_2 \Omega$  поверхностные силы;  $\nu$  — вектор внешней нормали к границе, а  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{u}$  и  $\hat{\dot{u}}$  — заданные в начальный момент времени напряжения, перемещения и скорости.

Нередко систему (2.11)–(2.18) рассматривают в так называемом *квазистатическом приближении*, отбрасывая инерциальное слагаемое и начальные условия. Дальнейшим упрощением является деформационная теория пластичности (модель Генки), в которой основное соотношение (2.13) и неравенство (2.14) записываются не для скоростей, а для самих тензоров деформаций и напряжений (о деформационной теории пластичности и границах ее применимости — см., например, [4], [5], [9], [10], [11]). В этом случае имеем

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (2.19)$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T); \quad (2.20)$$

$$\varepsilon(u) = A\sigma + \varepsilon^p, \quad \mathcal{F}(\sigma) \leq 0; \quad (2.21)$$

$$\varepsilon^p : (\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{M}_s^{n \times n}, \quad \mathcal{F}(\tau) \leq 0; \quad (2.22)$$

$$u = u_0 \quad \text{на } \partial_1 \Omega; \quad (2.23)$$

$$\sigma \nu = F \quad \text{на } \partial_2 \Omega. \quad (2.24)$$

## 2.5. Вариационная постановка задач деформационной теории пластичности

Известно, что задачу (2.19)–(2.24) можно сформулировать в вариационной форме (см., например, [16]). Введем для этого замкнутое выпуклое множество допустимых напряжений

$$K = \{ \tau \in \Sigma \mid \mathcal{F}(\tau) \leq 0 \text{ п.в. в } \Omega \}, \text{ где } \Sigma = L_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{n \times n}),$$

и множество допустимых перемещений

$$V_0 + u_0 = \{ u \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid u_i = w_i + u_{0i}, \quad w_i = 0 \text{ на } \partial_1 \Omega, \quad i = 1, \dots, n \}.$$

Для того чтобы  $V_0 + u_0$  не было пустым, достаточно предположить, что каждая функция  $u_{0i}$  есть сужение на  $\partial_1 \Omega$  некоторой функции из пространства  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ . Пусть также

$$f_i \in L_2(\Omega), \quad F_i \in L_2(\partial_2 \Omega), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Рассмотрим множество

$$Q_f^* = \{ \tau \in \Sigma \mid \operatorname{div} \tau + f = 0 \text{ в } \Omega, \quad \tau \nu = F \text{ на } \partial_2 \Omega \},$$

в определении которого выполнение соотношений следует понимать как следующее равенство:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(w) : \tau \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot w \, d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot w \, d\Gamma, \quad \forall w \in V_0,$$

где

$$V_0 = \{ w \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid w_i = 0 \text{ на } \partial_1 \Omega, \quad i = 1, \dots, n \}.$$

Это соотношение фактически означает, что уравнения равновесия и граничные условия относительно напряжений должны выполняться в *обобщенном смысле*.

Введем билинейную форму  $a: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(\tau, \sigma) = \int_{\Omega} A\tau : \sigma \, d\Omega.$$

В силу свойств тензора  $A$ , а именно выполнения двусторонних оценок,

$$\alpha_1 \xi : \xi \leq A\xi : \xi \leq \alpha_2 \xi : \xi, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2, \quad \forall \xi \in \mathbb{M}_s^{n \times n},$$

билинейная форма  $a(\sigma, \sigma)$  порождает в  $\Sigma$  норму, эквивалентную исходной.

ТЕОРЕМА 2.1. Если  $u^*, \sigma^*$  — решение задачи (2.19)–(2.24), то поле напряжений  $\sigma^*$  доставляет максимум функционалу

$$I^*(\sigma) = -\frac{1}{2} a(\sigma, \sigma) + \int_{\partial_1 \Omega} \sigma \nu \cdot u_0 d\Gamma$$

на множестве  $K \cap Q_f^*$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим равенство (2.21) на  $\tau - \sigma^*$ , где  $\tau$  — произвольный элемент множества  $K \cap Q_f^*$ , и проинтегрируем по  $\Omega$ . Проинтегрируем также (2.22) и, учитывая полученное неравенство, запишем

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^*) : (\tau - \sigma^*) d\Omega = \int_{\Omega} (A\sigma^* + \varepsilon^p) : (\tau - \sigma^*) d\Omega \leq \int_{\Omega} A\sigma^* : (\tau - \sigma^*) d\Omega.$$

Преобразуем левую часть неравенства

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^*) : (\tau - \sigma^*) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon(w^* + u_0) : (\tau - \sigma^*) d\Omega, \quad \text{где } w^* \in V_0.$$

Поскольку для  $\tau \in Q_f^*$  и  $\sigma^* \in Q_f^*$ , имеем равенство

$$\int_{\Omega} \varepsilon(w^*) : (\tau - \sigma^*) d\Omega = 0,$$

то

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^*) : (\tau - \sigma^*) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon(u_0) : (\tau - \sigma^*) d\Omega. \quad (2.26)$$

Предположение (2.25) для элементов множества  $Q_f^*$  позволяет проинтегрировать правую часть (2.26) по частям и получить

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u_0) : (\tau - \sigma^*) d\Omega = \int_{\partial_1 \Omega} (\tau - \sigma^*) \nu \cdot u_0 d\Gamma.$$

В итоге имеем

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^*) : (\tau - \sigma^*) d\Omega = \int_{\partial_1 \Omega} (\tau - \sigma^*) \nu \cdot u_0 d\Gamma,$$

а следовательно,

$$a(\sigma^*, \tau - \sigma^*) \geq \int_{\partial_1 \Omega} (\tau - \sigma^*) \nu \cdot u_0 d\Gamma, \quad \forall \tau \in K \cap Q_f^*. \quad (2.27)$$

Покажем, что выполнение неравенства (2.27) является необходимым и достаточным условием максимума функционала  $I^*(\sigma)$  на  $K \cap Q_f^*$ .

Сначала представим неравенство в следующем виде

$$I^*(\sigma^*) - \frac{1}{2} a(\sigma^*, \sigma^*) + a(\sigma^*, \tau) \geq I^*(\tau) + \frac{1}{2} a(\tau, \tau).$$

Тогда из соотношения

$$-\frac{1}{2}a(\sigma^*, \sigma^*) + a(\sigma^*, \tau) - \frac{1}{2}a(\tau, \tau) = -\frac{1}{2}a(\sigma^* - \tau, \sigma^* - \tau) \leq 0$$

следует

$$I^*(\sigma^*) \geq I^*(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{K} \cap \mathbb{Q}_f^*.$$

Теперь, наоборот, предположим, что  $\sigma^*$  — элемент, на котором функционал  $I^*$  достигает своего максимума, тогда

$$I^*(\sigma^*) \geq I^*((1 - \beta)\sigma^* + \beta\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{K} \cap \mathbb{Q}_f^*, \quad \forall \beta \in (0, 1). \quad (2.28)$$

Преобразуя правую часть неравенства

$$\begin{aligned} I^*((1 - \beta)\sigma^* + \beta\tau) &= I^*(\sigma^* + \beta(\tau - \sigma^*)) = \\ &= \left( -\frac{1}{2}a(\sigma^*, \sigma^*) - \beta a(\sigma^*, \tau - \sigma^*) - \frac{\beta^2}{2}a(\tau - \sigma^*, \tau - \sigma^*) \right) + \\ &\quad + \int_{\partial_1 \Omega} \sigma^* \nu \cdot u_0 \, d\Gamma + \beta \int_{\partial_1 \Omega} (\tau - \sigma^*) \nu \cdot u_0 \, d\Gamma, \end{aligned}$$

из (2.28) получаем

$$\beta a(\sigma^*, \tau - \sigma^*) + \frac{\beta^2}{2}a(\tau - \sigma^*, \tau - \sigma^*) \geq \beta \int_{\partial_1 \Omega} (\tau - \sigma^*) \nu \cdot u_0 \, d\Gamma. \quad (2.29)$$

Поскольку значение  $\beta$  может быть сделано сколь угодно малым, нарушение неравенства (2.27) повлекло бы нарушение неравенства (2.29). Следовательно, неравенство (2.27) выполняется.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Так как  $-I^*(\sigma)$  — строго выпуклый функционал, определенный на выпуклом замкнутом множестве  $\mathbb{K} \cap \mathbb{Q}_f^*$ , то решение задачи существует и единственно.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Рассмотренная вариационная задача, которую в эквивалентной формулировке на поиск минимума функционала  $-I^*(\sigma)$  принято называть *вариационным принципом Хаара–Кармана*, часто является основой различных численных алгоритмов решения пластических задач. При этом условие  $\sigma \in \mathbb{Q}_f^*$  или удовлетворяется точно (например, при помощи так называемых *равновесных конечных элементов*, для которых уравнения равновесия выполнены автоматически), или используется метод штрафа. Однако следует отметить, что такие методы достаточно трудоемкие и позволяют находить лишь поля напряжений, что для

задач идеальной пластичности недостаточно, поскольку здесь наибольший интерес представляет поле перемещений, которое при определенных условиях может иметь разрывы первого рода.

## 2.6. Минимаксная постановка задач деформационной теории пластичности

На множестве  $K \times V_0 + u_0$  определим лагранжиан

$$L(\sigma, u) = \int_{\Omega} (\varepsilon(u) : \sigma - \frac{1}{2} A\sigma : \sigma - f \cdot u) d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot u d\Gamma.$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Задача*

$$\sup_{\sigma \in K \cap Q_f^*} I^*(\sigma), \quad (2.30)$$

*рассмотренная в разделе 2.5, эквивалентна задаче*

$$\sup_{\sigma \in K} \inf_{u \in V_0 + u_0} L(\sigma, u). \quad (2.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал  $L(\sigma, u)$  при любом  $\sigma \in K$  является линейным относительно  $u$ , поэтому возможны только два варианта: либо

$$\inf_{u \in V_0 + u_0} L(\sigma, u) = -\infty,$$

либо

$$L(\sigma, u) = -\frac{1}{2} a(\sigma, \sigma) + \text{const.}$$

Последний случай имеет место, когда элемент  $\sigma$  принадлежит множеству  $K \cap Q_f^*$ , поскольку тогда выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \inf_{u \in V_0 + u_0} \left( \int_{\Omega} (\varepsilon(u) : \sigma - \frac{1}{2} A\sigma : \sigma - f \cdot u) d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot u d\Gamma \right) = \\ = \int_{\Omega} (\varepsilon(u_0) : \sigma - \frac{1}{2} A\sigma : \sigma - f \cdot u_0) d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot u_0 d\Gamma. \end{aligned}$$

Если учесть дополнительную гладкость тензора  $\sigma$ , наличие которой мы предположили в разделе 2.5, то получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\varepsilon(u_0) : \sigma - \frac{1}{2} A \sigma : \sigma - f \cdot u_0) d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot u_0 d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} (-\operatorname{div} \sigma \cdot u_0 - f \cdot u_0) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} (\sigma \nu - F) \cdot u_0 d\Gamma - \\ & \quad - \int_{\Omega} \frac{1}{2} A \sigma : \sigma d\Omega + \int_{\partial_1 \Omega} \sigma \nu \cdot u_0 d\Gamma = I^*(\sigma). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\inf_{u \in V_0 + u_0} L(\sigma, u) = \begin{cases} -\infty, & \sigma \notin Q_f^*; \\ I^*(\sigma), & \sigma \in Q_f^*. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sup_{\sigma \in K} \inf_{u \in V_0 + u_0} L(\sigma, u) = \sup_{\sigma \in K \cap Q_f^*} I^*(\sigma),$$

и теорема доказана.  $\square$

В соответствии с теорией седловых точек для двойственной задачи (2.30) прямой является следующая:

$$\inf_{u \in V_0 + u_0} \sup_{\sigma \in K} L(\sigma, u).$$

Построим эту задачу в явном виде, ограничиваясь случаем изотропного материала при  $n = 3$ . Тогда

$$A\sigma = \varepsilon^e = \frac{1}{2\mu} \sigma^D + \frac{1}{9\kappa} \operatorname{tr} \sigma \mathbb{I},$$

где  $\mu$  и  $\kappa$  — модуль сдвига и модуль объемного сжатия материала, соответственно. Поскольку

$$\sigma^D : \mathbb{I} = \left( \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma \mathbb{I} \right) : \mathbb{I} = \operatorname{tr} \sigma - \operatorname{tr} \sigma = 0,$$

то шаровая и девиаторная части тензора ортогональны. Следовательно,

$$A\sigma : \sigma = A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \frac{1}{2\mu} |\sigma^D|^2 + \frac{1}{9\kappa} (\operatorname{tr} \sigma)^2.$$

Тогда, выписывая часть лагранжиана  $L$ , зависящую от  $\sigma$ , имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in K} \int_{\Omega} \left( \varepsilon(u) : \sigma - \frac{1}{2} A \sigma : \sigma \right) d\Omega = \\ = \sup_{\sigma \in K} \int_{\Omega} \left( \varepsilon^D(u) : \sigma^D + \frac{1}{3} \operatorname{tr} \varepsilon(u) \operatorname{tr} \sigma - \frac{1}{4\mu} |\sigma^D|^2 - \frac{1}{18\kappa} (\operatorname{tr} \sigma)^2 \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Дальнейшие преобразования требуют конкретизации структуры множества  $K$ . Рассмотрим один *частный случай*, когда в качестве критерия пластичности используется критерий Мизеса, т.е.

$$K = \left\{ \sigma \in \Sigma \mid |\sigma^D| \leq \sqrt{2} k_* \text{ п.в. в } \Omega \right\}.$$

Тогда, поскольку шаровая и девиаторная части тензора независимы и условие, задающее множество  $K$ , — простое, все сводится к раздельному вычислению точных верхних граней по  $\sigma^D \in K^D$  и  $\operatorname{tr} \sigma \in L_2(\Omega)$ , где

$$K^D = \left\{ \sigma^D \in \Sigma \mid |\sigma^D| \leq \sqrt{2} k_* \text{ п.в. в } \Omega \right\},$$

т.е.

$$\sup_{\sigma^D \in K^D} \int_{\Omega} \left( \varepsilon^D(u) : \sigma^D - \frac{1}{4\mu} |\sigma^D|^2 \right) d\Omega \quad (2.33)$$

и

$$\sup_{\operatorname{tr} \sigma} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma \operatorname{tr} \varepsilon(u) - \frac{1}{18\kappa} (\operatorname{tr} \sigma)^2 \right) d\Omega. \quad (2.34)$$

Вычисление выражения (2.34) сводится к вычислению супремума от подынтегральной функции, поэтому из необходимого условия экстремума для п.в.  $x \in \Omega$  имеем

$$\operatorname{tr} \sigma(x) = 3\kappa \operatorname{tr} \varepsilon(u)(x) = 3\kappa \operatorname{div} u(x).$$

Следовательно, слагаемое (2.34) равно

$$\frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)^2 d\Omega. \quad (2.35)$$

Для слагаемого (2.33) возможны два варианта. Если бы не было ограничения  $|\sigma^D(x)| \leq \sqrt{2} k_*$  для п.в.  $x \in \Omega$ , то максимальное значение подынтегрального выражения достигалось бы при  $\sigma^D = 2\mu \varepsilon^D$ .



1. Если  $|\varepsilon^D| < k_*/(\sqrt{2}\mu)$ , то экстремум достигается внутри множества  $K^D$  и равен

$$\mu |\varepsilon^D|^2.$$

Тогда супремум (2.33) есть

$$\int_{\Omega} \mu |\varepsilon^D|^2 d\Omega. \quad (2.36)$$

2. Если  $|\varepsilon^D| \geq k_*/(\sqrt{2}\mu)$ , то экстремум достигается на границе множества  $K^D$ , т.е. при

$$|\sigma^D| = \sqrt{2} k_*.$$

Очевидно, что максимальное значение скалярного произведения двух векторов, один из которых имеет фиксированное направление и оба имеют фиксированную длину, достигается в случае, если их направления совпадают. Поэтому максимум величины  $\sigma^D : \varepsilon^D$  при конкретном  $\varepsilon^D$  достигается тогда, когда

$$\sigma^D = \sqrt{2} k_* \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}.$$

Тогда супремум (2.33) равен

$$\int_{\Omega} \left( \sqrt{2} k_* |\varepsilon^D| - \frac{k_*^2}{2\mu} \right) d\Omega. \quad (2.37)$$

Объединяя (2.36) и (2.37), имеем

$$\sup_{\sigma^D \in K^D} \int_{\Omega} \left( \varepsilon^D : \sigma^D - \frac{1}{4\mu} |\sigma^D|^2 \right) d\Omega = \int_{\Omega} \Phi(|\varepsilon^D|) d\Omega,$$

где

$$\Phi(\gamma) = \begin{cases} \mu\gamma^2 & \text{при } 0 \leq \gamma < k_*/(\sqrt{2}\mu); \\ \sqrt{2}k_*\gamma - k_*^2/(2\mu) & \text{при } \gamma \geq k_*/(\sqrt{2}\mu). \end{cases} \quad (2.38)$$

Таким образом, мы нашли явный вид выражения (2.32) и построили для двойственной задачи (2.30) прямую задачу (в смысле теории двойственности вариационного исчисления) следующего вида:

$$\inf_{u \in V_0 + u_0} J(u), \quad (2.39)$$

где

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\kappa}{2} (\operatorname{div} u)^2 + \Phi(|\varepsilon^D(u)|) - f \cdot u \right) d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot u d\Gamma. \quad (2.40)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.** Функционал (2.40) обладает свойством коэрцитивности только на нерефлексивном пространстве, поэтому решение задачи (2.39) может не существовать. Однако постановку (2.39)–(2.40) можно использовать для построения минимизирующей последовательности при помощи численных методов.

## 2.7. Теория суперпотенциала

В задачах механики твердого тела состояние среды, как правило, описывается при помощи двух переменных: тензор-функции напряжений  $\sigma$  и вектор-функции перемещений  $u$ . Помимо краевых условий и уравнений равновесия они должны удовлетворять *определяющим соотношениям*, которые обычно связывают в каждой точке  $x \in \Omega$  тензор деформаций  $\varepsilon(u)(x)$  с тензором напряжений  $\sigma(x)$ . Одним из способов задания таких соотношений является задание так называемого *суперпотенциала* или *надпотенциала* (см., например, [14], [16]), когда считается заданной некоторая собственная, полунепрерывная снизу, выпуклая функция  $\psi$  со значениями в  $\mathbb{R} \cup +\infty$ . При этом определяющее соотношение вводится следующим образом:

$$\sigma(x) \in \partial\psi(\varepsilon(u)(x)), \quad (2.41)$$

где  $\partial\psi$  обозначает субдифференциал  $\psi$ . В силу свойств субдифференциала оно равносильно соотношению

$$\varepsilon(u)(x) \in \partial\psi^*(\sigma(x)), \quad (2.42)$$

где  $\psi^*$  — функционал сопряженный к  $\psi$  по Юнгу–Фенхелю, т.е. по определению

$$\psi^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{M}_s^{n \times n}} \{\xi : \xi^* - \psi(\xi)\}.$$

Известно (см., например, [16], [17]), что этот функционал вместе с  $\psi$  удовлетворяет неравенству

$$\psi(\xi) + \psi^*(\xi^*) - \xi : \xi^* \geq 0, \quad \forall \xi, \xi^* \in \mathbb{M}_s^{n \times n},$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда  $\xi$  и  $\xi^*$  принадлежат, соответственно, множествам  $\partial\psi^*(\xi^*)$  и  $\partial\psi(\xi)$ . Таким образом,

имеем соотношение

$$\psi(\varepsilon(u)(x)) + \psi^*(\sigma(x)) = \varepsilon(u)(x) : \sigma(x).$$

Отметим, что субдифференциал может состоять более чем из одного элемента, т.е. соотношения (2.41)–(2.42) относятся к классу *многозначных*. При этом могут возникать ситуации, когда, например, одному и тому же тензору  $\sigma$  соответствуют различные перемещения.

В том случае, если функционалы  $\psi$  и  $\psi^*$  дифференцируемы, соотношение (2.41) имеет вид

$$\sigma(x) = \psi'(\varepsilon(u)(x)), \quad (2.43)$$

где  $\psi'$  обозначает производную по Гато функционала  $\psi$ .

Соотношение (2.42) также приобретает форму равенства

$$\varepsilon(u)(x) = \psi^{*'}(\sigma(x)). \quad (2.44)$$

Покажем, как соотношения (2.41) и (2.42) приводят к некоторым вариационным задачам для перемещений  $u$  и напряжений  $\sigma$ .

Сначала рассмотрим вариационную постановку в перемещениях. При этом предположим, что  $u \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , тогда для п.в.  $x \in \Omega$  тензор деформаций  $\varepsilon(u)(x)$  принадлежит пространству  $\mathbb{M}_s^{n \times n}$ . Поскольку  $\psi$  — выпуклая функция, то

$$\psi(\xi) \geq \psi(\varepsilon(u)(x)) + \sigma(x) : (\xi - \varepsilon(u)(x)), \quad \forall \xi \in \mathbb{M}_s^{n \times n}.$$

В частности, если положить  $\xi = \varepsilon(v)(x)$ , то получим соотношение

$$\psi(\varepsilon(v)(x)) \geq \psi(\varepsilon(u)(x)) + \sigma(x) : (\varepsilon(v)(x) - \varepsilon(u)(x)), \quad (2.45)$$

справедливое для произвольной функции  $v \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Вводя обозначение

$$\Psi(p) = \int_{\Omega} \psi(p(x)) dx, \quad p \in \Sigma = L_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{n \times n})$$

и интегрируя (2.45) по  $\Omega$ , получаем

$$\Psi(\varepsilon(v)) \geq \Psi(\varepsilon(u)) + \int_{\Omega} \sigma(x) : (\varepsilon(v)(x) - \varepsilon(u)(x)) dx.$$

Тензор  $\sigma$  должен удовлетворять уравнениям равновесия и граничным условиям на части  $\partial_2\Omega$ , которые можно записать в следующем виде (см. раздел 2.5):

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v - u) dx = \int_{\Omega} f \cdot (v - u) dx + \int_{\partial_2\Omega} F \cdot (v - u) d\Gamma, \quad (2.46)$$

где предполагается, что  $v \in V_0 + u_0$  (т.е. удовлетворяет заданным краевым условиям в перемещениях). Отсюда получаем

$$\Psi(\varepsilon(v)) \geq \Psi(\varepsilon(u)) + \int_{\Omega} f \cdot (v - u) dx + \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot (v - u) d\Gamma.$$

Выполнение последнего неравенства эквивалентно утверждению, что  $u$  есть решение вариационной задачи

$$\inf_{v \in V_0 + u_0} J(v), \quad (2.47)$$

где

$$J(v) = \Psi(\varepsilon(v)) - \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot v d\Gamma.$$

Задачу (2.47) называют *вариационным принципом для перемещений*.

Опишем теперь вариационную задачу, решением которой является поле напряжений  $\sigma$ . Предположим, что  $\sigma \in \Sigma$ , тогда для п.в.  $x \in \Omega$ , тензор напряжений  $\sigma(x)$  принадлежит пространству  $\mathbb{M}_s^{n \times n}$ . Заметим, что из соотношения (2.42) и того, что  $\psi^*$  — выпуклая функция, следует неравенство

$$\psi^*(\xi^*) \geq \psi^*(\sigma(x)) + \varepsilon(u)(x) : (\xi^* - \sigma(x)), \quad \forall \xi^* \in \mathbb{M}_s^{n \times n}.$$

Запишем это соотношение для произвольного элемента  $\tau \in \Sigma$  для п.в.  $x \in \Omega$

$$\psi^*(\tau(x)) \geq \psi^*(\sigma(x)) + \varepsilon(u)(x) : (\tau(x) - \sigma(x)). \quad (2.48)$$

Как и в предыдущем случае, обозначая

$$\Psi^*(\tau) = \int_{\Omega} \psi^*(\tau(x)) dx$$

и интегрируя (2.48) по  $\Omega$ , получаем

$$\Psi^*(\tau) \geq \Psi^*(\sigma) + \int_{\Omega} \varepsilon(u)(x) : (\tau(x) - \sigma(x)) dx.$$

Пусть тензор  $\tau$  (как и  $\sigma$ ) принадлежит множеству тензоров, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях в обобщенном смысле. Тогда, предполагая (2.25), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : (\tau - \sigma) dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\tau - \sigma) \cdot u dx + \\ &+ \int_{\partial \Omega} (\tau - \sigma)\nu \cdot u d\Gamma = \int_{\partial_1 \Omega} (\tau - \sigma)\nu \cdot u_0 d\Gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что  $\sigma$  есть решение следующей вариационной задачи

$$\inf_{\tau \in \mathbb{Q}_f^*} I^*(\tau), \quad (2.49)$$

где

$$I^*(\tau) = -\Psi^*(\tau) + \int_{\partial_1 \Omega} \tau \nu \cdot u_0 \, d\Gamma.$$

Задача (2.49) есть *вариационный принцип для напряжений*.

Заметим, что сформулированные выше вариационные принципы с точки зрения вариационного исчисления представляют собой пару так называемых двойственных вариационных задач ((2.47) — прямая, (2.49) — двойственная; см., например, [7], [17]).

В завершение параграфа приведем два примера. Рассмотрим сначала случай линейно-упругого изотропного материала. В этом случае суперпотенциал (как и в случае упругой деформации, отметим его индексом  $e$ ) задается следующим образом:

$$\psi_e(\xi) = \frac{\varkappa}{2} (\operatorname{tr} \xi)^2 + \mu |\xi^D|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{M}_s^{n \times n},$$

где  $\varkappa$  и  $\mu$  — константы материала, введенные в разделе 2.6. Легко показать, что

$$\psi'_e(\xi) = \varkappa \operatorname{tr} \xi \mathbb{I} + 2\mu \xi^D,$$

и (2.43) принимает вид хорошо известного соотношения

$$\sigma = \varkappa \operatorname{tr} \varepsilon \mathbb{I} + 2\mu \varepsilon^D.$$

По определению сопряженной функции имеем

$$\psi_e^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{M}_s^{n \times n}} \left( \xi^* : \xi - \left( \frac{\varkappa}{2} (\operatorname{tr} \xi)^2 + \mu |\xi^D|^2 \right) \right).$$

Необходимые условия экстремума приводят к соотношению

$$\xi^* = \varkappa \operatorname{tr} \xi_0 \mathbb{I} + 2\mu \xi_0^D,$$

а следовательно,

$$\operatorname{tr} \xi^* = \xi^* : \mathbb{I} = 3\varkappa \operatorname{tr} \xi_0, \quad \xi^{*D} = 2\mu \xi_0^D.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\psi_e^*(\xi^*) &= \xi^* : \xi_0 - \left( \frac{\varkappa}{2} (\text{tr } \xi_0)^2 + \mu |\xi_0^D|^2 \right) = \\ &= \frac{\varkappa}{2} (\text{tr } \xi_0)^2 + \mu |\xi_0^D|^2 = \frac{1}{18\varkappa} (\text{tr } \xi^*)^2 + \frac{1}{4\mu} |\xi^{*D}|^2.\end{aligned}\quad (2.50)$$

В случае, если материал не изотропен, то суперпотенциал  $\psi_e$  задается соотношением

$$\psi_e(\xi) = \frac{1}{2} C \xi : \xi,$$

где  $C$  — тензор модулей упругости. Тогда сопряженная функция имеет вид

$$\psi_e^*(\xi^*) = \frac{1}{2} A \xi^* : \xi^*,$$

где  $A$  — тензор модулей податливости.

Вернемся к модели идеальной пластичности Генки с условием Мизеса, уже рассмотренной нами в разделе 2.6. В этом случае легко определяется не сама функция  $\psi$ , а сопряженная функция  $\psi^*$

$$\psi^*(\xi^*) = \begin{cases} \psi_e^*(\xi^*), & \text{если } \xi^* \in K_\xi; \\ +\infty, & \text{если } \xi^* \notin K_\xi, \end{cases}$$

где

$$K_\xi = \left\{ \xi^* \in \mathbb{M}_s^{n \times n} \mid |\xi^{*D}| \leq \sqrt{2} k_* \right\}.$$

Возможность нахождения явного вида функции  $\psi(\xi)$  обусловлена простотой структуры множества  $K_\xi$  и тем фактом, что при сделанных выше предположениях вторая сопряженная к  $\psi$  функция совпадает с исходной, т.е.

$$(\psi^*)^*(\xi) = \psi(\xi).$$

Тогда по определению имеем

$$\psi(\xi) = \sup_{\xi^* \in \mathbb{M}_s^{n \times n}} \{ \xi : \xi^* - \psi^*(\xi^*) \} = \sup_{\xi^* \in K_\xi} \{ \xi : \xi^* - \psi_e^*(\xi^*) \}.$$

Учитывая явный вид функции  $\psi_e^*(\xi^*)$ , заданный формулой (2.50), и независимость шаровой и девиаторной компонент тензора  $\xi^*$ , приходим к задаче, которая уже возникала при вычислении точной верхней грани (2.32). Повторив все рассуждения заново, можно получить следующее выражение для суперпотенциала:

$$\psi(\xi) = \frac{\varkappa}{2} (\text{tr } \xi)^2 + \Phi(|\xi^D|), \quad (2.51)$$

где функция  $\Phi$  задается формулой (2.38).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Легко видеть, что в случае суперпотенциала, определяемого формулой (2.51), вариационный принцип (2.47) есть не что иное как (2.39) с функционалом, задаваемым формулой (2.40).

## 2.8. Кручение упругопластического стержня

В завершение главы приведем пример решения одной из классических задач механики деформируемого твердого тела — задачи о кручении цилиндрического стержня, которая в различных постановках рассматривалась многими авторами (см., например, [9]–[12]).

Предположим, что стержень представляет собой длинный цилиндр постоянного сечения (не обязательно кругового). Выделим из его середины участок длины  $h$ , лежащий далеко от концов. Пусть он занимает область  $\Omega$  с торцами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  и боковой поверхностью  $\Gamma_2$  (см. рис. 2.5). Пусть боковая поверхность цилиндра свободна от любых напряжений,

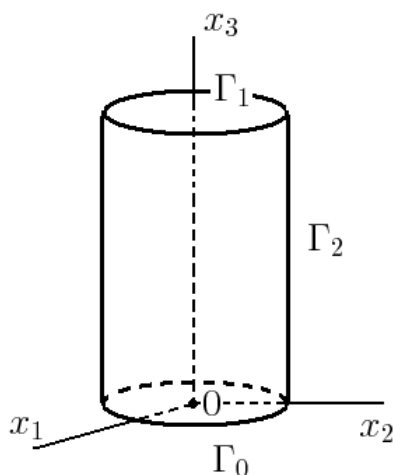


Рис. 2.5. Поверхности цилиндра

объемные силы пренебрежимо малы, а к торцам не приложено растягивающих напряжений. Пусть при этом осуществляется поворот точек верхнего сечения вокруг оси  $x_3$ , где  $\alpha$  — угол закрутки на единицу длины. Тогда соответствующие граничные условия и уравнения имеют вид

$$f = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (2.52)$$

$$\sigma\nu = 0 \quad \text{на } \Gamma_2; \quad (2.53)$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \text{ и } \Gamma_1; \quad (2.54)$$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma_0; \quad (2.55)$$

$$u_1 = -\alpha h x_2 \quad \text{на } \Gamma_1; \quad (2.56)$$

$$u_2 = +\alpha h x_1 \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (2.57)$$

Легко видеть, что

$$\sigma \nu \cdot u_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \text{ и } \Gamma_2;$$

$$\sigma \nu \cdot u_0 = \sigma_{ij} \nu_j u_{0i} = \sigma_{i3} u_{0i} \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Поэтому в соответствии со сформулированной в разделе 2.5 теоремой поле напряжений  $\sigma$  минимизирует на  $K \cap Q_f^*$  функционал

$$\frac{1}{2} a(\sigma, \sigma) - \alpha h \int_{\Gamma_1} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) d\Gamma,$$

где в данном случае

$$Q_f^* = \{ \sigma \in \Sigma \mid \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ в } \Omega, \sigma \nu = 0 \text{ на } \Gamma_2, \sigma_{33} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \text{ и } \Gamma_1 \}.$$

Можно показать, что решение этой задачи таково, что все компоненты тензора напряжений  $\sigma$ , кроме  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$ , равны нулю. Тогда из трех уравнений равновесия останется одно, а именно

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0. \quad (2.58)$$

Вводя вспомогательную функцию  $\theta = \theta(x_1, x_2)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2};$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1},$$

мы автоматически удовлетворяем условию (2.58). Уравнение (2.53) теперь можно представить в виде

$$\nu_1 \sigma_{13} + \nu_2 \sigma_{23} = \nu_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \nu_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0.$$

Вводя орт касательной к границе любого поперечного сечения (например,  $\Gamma_0$ ; рис. 2.6)  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ ,  $\tau_1 = -\nu_2$ ,  $\tau_2 = \nu_1$ , получаем

$$\nu_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \nu_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \tau \cdot \operatorname{grad} \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial s},$$



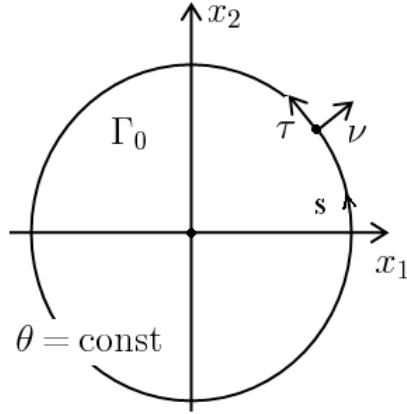


Рис. 2.6. Поперечное сечение цилиндра и направление обхода его контура где  $s$  — параметр, задающий границу сечения  $\Gamma_0$ . Таким образом,

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = 0,$$

и  $\theta = \text{const}$  на границе двумерной области  $\Gamma_0$ .

Поскольку функция  $\theta$  определена с точностью до константы, можно без ограничения общности считать, что  $\theta \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Gamma_0)$  (так как должно выполняться условие  $\sigma_{i3} \in L_2(\Omega)$  для  $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим условие пластичности Мизеса. Поскольку

$$\sigma^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad |\sigma^D|^2 = 2(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2),$$

то оно приобретает вид

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \leq k_*^2 \quad \text{почти всюду на } \Gamma_0.$$

Переходя к функции  $\theta$ , имеем

$$|\text{grad } \theta|^2 \leq k_*^2 \quad \text{почти всюду на } \Gamma_0.$$

Для изотропного материала (см. раздел 2.6)

$$A\sigma : \sigma = \frac{1}{2\mu} |\sigma^D|^2 + \frac{1}{9\kappa} (\text{tr } \sigma)^2,$$

т.е., учитывая тот факт, что  $\text{tr } \sigma = 0$ , имеем

$$\frac{1}{2} a(\sigma, \sigma) = \int_0^h \left( \int_{\Gamma_0} \frac{1}{4\mu} |\sigma^D|^2 dx \right) dx_3 = \frac{h}{2\mu} \int_{\Gamma_0} |\text{grad } \theta|^2 dx,$$

где  $dx = dx_1 dx_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $h = 1$ .

Поскольку в силу сделанных предположений все поперечные сечения *отсчетной конфигурации* идентичны и поле напряжений не зависит

от  $x_3$ , принцип Хаара–Кармана можно записать относительно одного сечения —  $\Gamma_0$ , предварительно домножив оба слагаемых на  $\mu$ . Это приводит к следующей вариационной задаче: найти такой элемент  $\theta^* \in K_\theta$ , на котором достигает минимума функционал

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |\text{grad } \theta|^2 dx + \mu\alpha \int_{\Gamma_0} \left( x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) dx,$$

где

$$K_\theta = \left\{ \theta \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Gamma_0) \mid |\text{grad } \theta| \leq k_* \text{ п.в. на } \Gamma_0 \right\}.$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx &= x_1 \theta \Big|_{\partial \Gamma_0} - \int_{\Gamma_0} \theta dx = - \int_{\Gamma_0} \theta dx; \\ \int_{\Gamma_0} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx &= x_2 \theta \Big|_{\partial \Gamma_0} - \int_{\Gamma_0} \theta dx = - \int_{\Gamma_0} \theta dx, \end{aligned}$$

окончательно приходим к задаче минимизации

$$\inf_{K_\theta} I^*(\theta), \quad (2.59)$$

где

$$I^*(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |\text{grad } \theta|^2 dx - 2\mu\alpha \int_{\Gamma_0} \theta dx. \quad (2.60)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta, \varphi) &= \int_{\Gamma_0} \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \varphi dx; \\ c &= 2\mu\alpha; \\ l(\theta) &= \int_{\Gamma_0} c\theta dx, \end{aligned}$$

запишем функционал (2.60) в виде

$$I^*(\theta) = \frac{1}{2} \tilde{a}(\theta, \theta) - l(\theta).$$

Тогда в соответствии с доказанными выше теоремами поле  $\theta^*$ , определяющее тензор напряжений в упругопластическом стержне, является решением вариационного неравенства

$$\tilde{a}(\theta^*, \varphi - \theta^*) \geq l(\varphi - \theta^*), \quad \forall \varphi \in K_\theta; \quad (2.61)$$

при этом решение  $\theta^*$  существует и единственно.

Рассмотрим один частный случай, когда известно аналитическое решение. Пусть  $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ , т.е. цилиндр имеет круговое сечение радиуса  $R$ , тогда естественно ввести полярные координаты  $(r, \varphi)$  и учесть осевую симметрию задачи, положив  $\theta = \theta(r)$ . Задача (2.59) приобретает следующий вид:

$$\inf_{\theta \in \tilde{K}_\theta} \int_0^R G(r, \theta, \theta_r) dr,$$

где

$$G(r, \theta, \theta_r) = \frac{1}{2} \theta_r^2 r - c \theta r, \quad \theta_r = \frac{d\theta}{dr};$$

$$\tilde{K}_\theta = \{ \theta \in \mathbf{W}_2^1([0, R]), \theta|_R = 0 \mid |\theta_r| \leq k_* \}.$$

Там, где функция, минимизирующая функционал, соответствует внутренним точкам области  $\tilde{K}_\theta$ , она должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dr} G_{\theta_r} - G_\theta = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dr} (r\theta_r) + cr = 0;$$

$$r\theta_r = -\frac{cr^2}{2} + D, \quad D = \text{const};$$

$$\theta_r = -\frac{cr}{2} + \frac{D}{r}.$$

Поскольку производная  $\theta_r$  должна быть ограничена во всех точках,  $D = 0$ . Следовательно,

$$\theta = E - \frac{cr^2}{4}, \quad E = \text{const}, \quad |\theta_r| = \frac{cr}{2}.$$

Для внутренних точек области выполняется неравенство

$$|\theta_r| \leq k_*, \quad \text{т.е.} \quad cr < 2k_*.$$

Если значение  $c$  мало, то полученное решение справедливо для всех  $r \in [0, R]$ . Тогда выберем  $E$  из условия  $\theta(R) = 0$ , т.е.

$$E = \frac{c}{4} R^2.$$

Таким образом, имеем

$$\theta = \frac{c}{4}(R^2 - r^2) \quad \text{при} \quad c \leq 2k_*/R.$$

Если  $c > 2k_*/R$ , то в области  $r \in [0, R']$ , где  $c = 2k_*/R'$ , имеем

$$\theta = E - \frac{c}{4}r^2, \quad (2.62)$$

а в области  $r \in [R', R]$ , поскольку  $\theta = 0$  при  $r = R$ , имеем

$$\theta = k_*(R - r), \quad |\theta_r| = k_*. \quad (2.63)$$

Константу  $E$  определим из условия непрерывности функции  $\theta(r)$  в точке  $R'$

$$E - \frac{c}{4}R'^2 = k_*(R - R'), \quad R' = \frac{2k_*}{c};$$

$$E = \frac{c}{4} \frac{4k_*^2}{c^2} + k_*R - \frac{2k_*^2}{c} = k_* \left( R - \frac{k_*}{c} \right).$$

В результате получаем (см. рис. 2.7), что

$$\theta(r) = \begin{cases} k_*(R - k_*/c) - cr^2/4 & \text{при } 0 \leq r < R'; \\ k_*(R - r) & \text{при } R' \leq r \leq R. \end{cases}$$

Отметим, что в точке  $r = R'$  функция  $\theta$  не только непрерывна, но и сохраняет непрерывную производную.

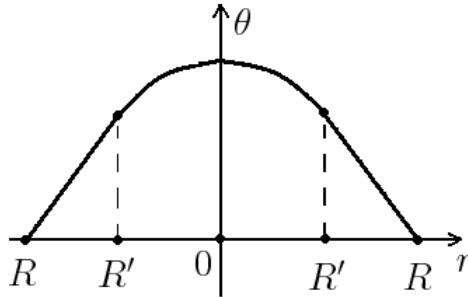


Рис. 2.7. Поведение решения задачи  $\theta(r)$

В заключение раздела приведем постановку задачи о кручении стержня в перемещениях. В случае длинного стержня перемещения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , удовлетворяющие заданным условиям, из механических соображений естественно искать в виде

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3, \quad u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2),$$

где  $\varphi$  — функция, характеризующая деформацию поперечных сечений. Нетрудно видеть, что при таком задании перемещений мы имеем

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 0, & u_{1,2} &= -\alpha x_3, & u_{1,3} &= -\alpha x_2; \\ u_{2,1} &= \alpha x_3, & u_{2,2} &= 0, & u_{2,3} &= \alpha x_1; \\ u_{3,1} &= \alpha \varphi_{,1}, & u_{3,2} &= \alpha \varphi_{,2}, & u_{3,3} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\varepsilon(u) = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha(-x_2 + \varphi_{,1}) \\ 0 & 0 & \alpha(x_1 + \varphi_{,2}) \\ \alpha(-x_2 + \varphi_{,1}) & \alpha(x_1 + \varphi_{,2}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= \operatorname{tr} \varepsilon(u) = 0; \\ |\varepsilon^D(u)|^2 &= \alpha^2 ((x_1 + \varphi_{,2})^2 + (-x_2 + \varphi_{,1})^2), \end{aligned}$$

и функционал (2.40) в задаче минимизации (2.39) имеет вид

$$J(u) = \int_{\Gamma_0} \Phi (|\varepsilon^D(u)|) dx_1 dx_2,$$

где функция  $\Phi$  задается формулой (2.38).

## 2.9. Комментарии к главе

По своим математическим свойствам задачи идеальной пластичности существенно отличаются от других задач механики деформируемого твердого тела и близки к вариационным проблемам теории непараметрических минимальных поверхностей (см., например, [2]), в которых требуется определить функцию  $w$ , сообщающую в области  $\Omega$  минимум функционалу

$$J(w) = \int_{\Omega} (1 + |\nabla w|^2)^{1/2} d\Omega$$

при выполнении на границе  $\partial\Omega$  заданного краевого условия  $w = u_0$ . Хорошо известно, что решение этой задачи может иметь разрывы первого рода на тех частях границы области, которые имеют отрицательную кривизну. Таким образом, исходная вариационная постановка является математически некорректной, поскольку минимизирующая последовательность может сходиться к разрывной функции, для которой значение

функционала  $J$  не определено. Эта особенность является общей чертой класса вариационных задач с функционалами линейного роста, когда требуется минимизировать интегральный функционал с подынтегральной функцией, имеющей линейный рост относительно компонент градиента  $w$ . В этом случае функционал является коэрцитивным только на некотором нерелаксивном пространстве (для задачи о минимальной поверхности это будет пространство  $W_1^1(\Omega)$ ), что не позволяет использовать известные результаты вариационного исчисления для доказательства существования решения. Численные методы, основанные на использовании такой вариационной постановки, также будут сталкиваться с серьезными трудностями, поскольку попытка приблизить разрывное решение при помощи последовательности кусочно-полиномиальных функций приводит к плохо обусловленным конечномерным задачам. Для преодоления этих трудностей оказывается необходимым произвести математическое расширение (релаксацию) исходной проблемы с тем, чтобы, сохранив точную нижнюю грань исходной вариационной задачи, доопределить функционал на более широком функциональном классе. Соответствующее расширенное множество допустимых функций, как правило, содержит суммируемые функции, первые производные которых являются ограниченными мерами.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольтер.–М. : Мир, 1979.–574 с.
2. **Джусти Э.** Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации / Э. Джусти.–М. : Мир, 1989.–239 с.
3. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс.–М. : Наука, 1980.–383 с.
4. **Ивлев Д. Д.** Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев.–М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.–448 с.
5. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин.–М.; Л. : Гостехиздат, 1948.–376 с.
6. **Ильюшин А. А.** Труды. Т. 2. Пластичность: 1946-1966 / А. А. Ильюшин.–М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.–479 с.
7. **Иоффе А. Д.** Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров.–М. : Наука, 1974.–479 с.
8. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев.–М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.–704 с.
9. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности: учеб. пособие для ун-тов / Л. М. Качанов.–2-е изд., перераб. и доп.–М. : Наука, 1969.–420 с.
10. **Клюшников В. Д.** Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников.–М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.–208 с.
11. **Колтунов М. А.** Прикладная механика деформируемого твердого тела / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода.–М. : Высш. шк., 1983.–349 с.
12. **Мосолов П. П.** Механика жесткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников.–М. : Наука, 1981.–208 с.
13. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1 / А. Надаи.–М. : Изд-во иностр. лит., 1954.–647 с.
14. **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос.–М. : Мир, 1989.–492 с.
15. **Репин С. И.** Вариационно-разностные методы в математических задачах теории пластичности: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С. И. Репин.–СПб. : С.-Петербур. гос. ун-т, 1994.–307 с.
16. **Темам Р.** Математические задачи теории пластичности / Р. Темам.–М. : Наука, 1991.–288 с.
17. **Экланд И.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам.–М. : Мир, 1979.–399 с.
18. **Glowinski R.** Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer Series in Computational Physics / R. Glowinski.–New York, etc. : Springer-Verlag. XV, 1984.–493 p.
19. **Rockafellar R. T.** Monotone operators and the proximal point algorithm / R. T. Rockafellar // SIAM J. Control Optimization.–1976.–Vol. 14.–P. 877–898.

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Методы решения вариационных неравенств.....	4
1.1. Предварительные сведения.....	4
1.2. Вариационные неравенства и выпуклые вариационные задачи.....	6
1.3. Аппроксимация вариационных неравенств.....	9
1.4. Методы штрафа и регуляризации.....	16
1.5. Методы теории двойственности.....	22
1.6. Проксимационный метод.....	29
1.7. Метод последовательных приближений.....	33
Глава 2. Математическая теория пластичности.....	40
2.1. Физические основы пластичности.....	40
2.2. Идеальная пластичность.....	42
2.3. Поверхность текучести.....	44
2.4. Полная система уравнений теории идеальной пластичности.....	47
2.5. Вариационная постановка задач деформационной теории пластичности.....	50
2.6. Минимаксная постановка задач деформационной теории пластичности.....	53
2.7. Теория суперпотенциала.....	57
2.8. Кручение упругопластического стержня.....	62
2.9. Комментарии к главе.....	68
Библиографический список.....	70



РЕПИН Сергей Игоревич  
ФРОЛОВ Максим Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ  
СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Пряникова*  
Технический редактор *А. И. Колодяжная*  
Оригинал-макет подготовлен авторами

Директор Издательства Политехнического университета *А. В. Иванов*

Свод. темплан 2008 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 — учебная литература

---

Подписано в печать	Формат 60x84/16
Усл. печ. л.	Уч.-изд. л.
	Тираж 100. Заказ

---

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
Издательство Политехнического университета,  
член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.

Адрес университета и издательства:  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.