Развитие функционального подхода к контролю точности решений задач об изгибе стержней Тимошенко

ИПММ, кафедра «Прикладная математика»

Выполнила студентка группы 63601/1 Чистякова Ольга

Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Фролов М.Е.

Постановка задачи

- Вывести аналитически апостериорную оценку функционального типа для задачи об изгибе криволинейного стержня Тимошенко

- Численно реализовать полученную оценку в программном комплексе MATLAB и продемонстрировать ее свойства на модельных задачах

Оценки погрешности

Априорные: оценка скорости сходимости

$$\|u - \tilde{u}\| \le M_{apr}(u, D)$$

Апостериорные: точность конкретного приближенного решения

$$\|u - \tilde{u}\| \le M_{apost}(\tilde{u}, D)$$

u – точное решение, $\tilde{u}$ – приближенное решение,
D – исходные данные задачи.

Апостериорные оценки

Критерии качества:

- Надежность
- Универсальность
- Эффективность

Апостериорные оценки

- Методы невязок (1978 – …)
  - Явные
  - Неявные

- Методы, основанные на осреднении градиента приближенного решения (1987 – …)

Апостериорные оценки

- Апостериорные оценки функционального типа

  (1996 – … С.И. Репин и коллеги)

  - универсальны, надежны, точны

  - эффективная реализация требует дополнительных усилий

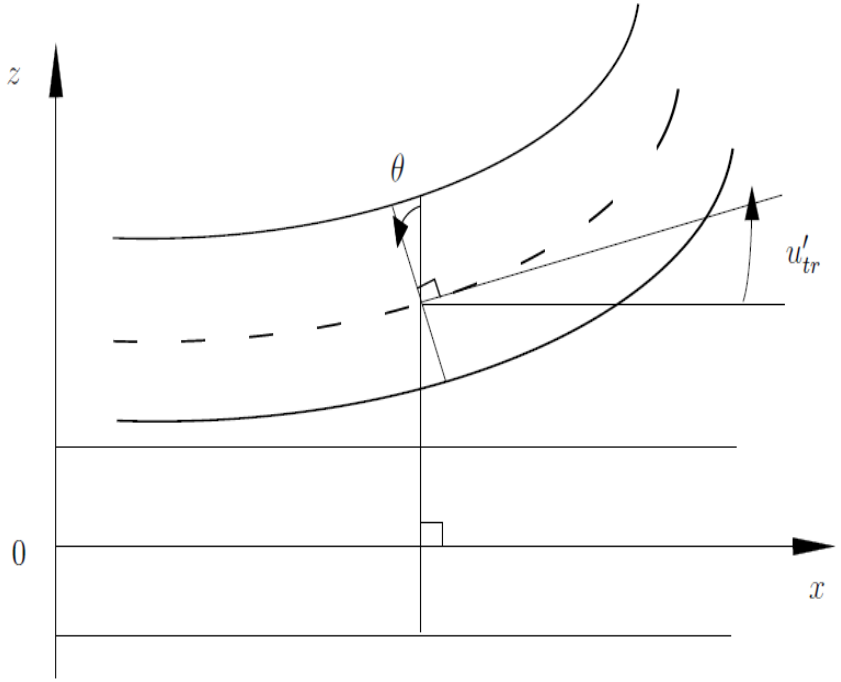
  - позволяют контролировать широкий спектр погрешностей

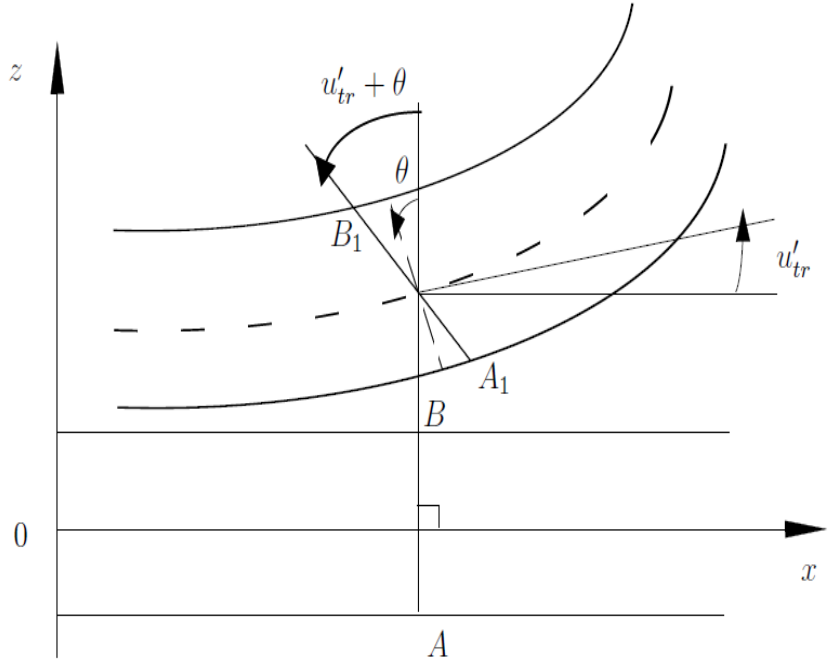
Модели стержней

- Плоские поперечные сечения после изгиба остаются плоскими.
- Все продольные сечения сопротивляются изгибу независимо.

Модель Эйлера-Бернулли	**Модель Тимошенко**
Плоские поперечные сечения после изгиба остаются перпендикулярными к деформированной в процессе изгиба оси.	Плоские поперечные сечения после изгиба могут не оставаться перпендикулярными к деформированной в процессе изгиба оси.

Модели стержней





Модель Эйлера-Бернулли

Модель Тимошенко

Некоторые функциональные апостериорные оценки известны:

М.Е. Фролов, 2009
O. Mali, 2010-2011

М.Е. Фролов, 2010
(прямолинейный стержень)

Криволинейный стержень Тимошенко: постановка задачи

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \left(EA\left(u'_{ax} + \dfrac{u_{tr}}{R} \right) \right)' + \dfrac{kGA}{R}\left(u'_{tr} + \theta - \dfrac{u_{ax}}{R} \right) + F_{ax} = 0 \\ -\dfrac{EA}{R}\left(u'_{ax} + \dfrac{u_{tr}}{R} \right) + \left(kGA\left(u'_{tr} + \theta - \dfrac{u_{ax}}{R} \right) \right)' + F_{tr} = 0 \\ \left(EI_s\theta' \right)' - kGA\left(u'_{tr} + \theta - \dfrac{u_{ax}}{R} \right) + m = 0 \end{cases}$$

где u_{ax} – осевое перемещение, u_{tr} – поперечное перемещение, θ – угол поворота сечения, k – корректировочный коэффициент, A – площадь поперечного сечения, E – модуль Юнга, G – модуль сдвига, I_S – осевой момент инерции, R – радиус кривизны, F_{ax} – распределенная осевая сила, F_{tr} – распределенная нормальная сила, m – распределенный изгибающий момент.

Криволинейный стержень Тимошенко: постановка задачи

Граничные условия:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_{tr}(0) = \mathrm{u}_{tr}(\mathrm{L}) = 0 \\ \mathrm{u}_{ax}(0) = \mathrm{u}_{ax}(\mathrm{L}) = 0 \\ \theta(0) = \theta(L) = 0 \end{cases}$$

где L – длина стержня.

Энергетическая норма ошибки:

$$\varepsilon^2 = \left\| \sqrt{EA}\left(e'_{ax} + \frac{e_{tr}}{R} \right) \right\|^2 + \left\| \sqrt{EI_s}\, e'_{\theta} \right\|^2 + \left\| \sqrt{kGA}\left(e'_{tr} + e_{\theta} - \frac{e_{ax}}{R} \right) \right\|^2$$

где $e_{ax} = u_{ax} - \tilde{u}_{ax},\ e_{tr} = u_{tr} - \tilde{u}_{tr},\ e_{\theta} = u_{\theta} - \tilde{u}_{\theta},$

а $\tilde{u}_{ax},\ \tilde{u}_{tr},\ \tilde{u}_{\theta}$ – приближенное решение задачи.

Криволинейный стержень Тимошенко: замена переменных

$$\gamma = EA\left(u'_{ax} + \frac{u_{tr}}{R}\right),\ \psi = EI_s\theta',\ \xi = kGA\left(u'_{tr} + \theta - \frac{u_{ax}}{R}\right);$$

$$\tilde{\gamma} = EA\left(\tilde{u}'_{ax} + \frac{\tilde{u}_{tr}}{R}\right),\ \tilde{\psi} = EI_s\tilde{\theta}',\ \tilde{\xi} = kGA\left(\tilde{u}'_{tr} + \tilde{\theta} - \frac{\tilde{u}_{ax}}{R}\right);$$

$$e_\gamma = \gamma - \tilde{\gamma},\ e_\psi = \psi - \tilde{\psi},\ e_\xi = \xi - \tilde{\xi}.$$

Энергетическая норма ошибки:

$$\varepsilon^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{EA}} e_\gamma \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{EI_s}} e_\psi \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{kGA}} e_\xi \right\|^2$$

Криволинейный стержень Тимошенко: ввод свободных переменных

Пусть $\hat{\gamma},\ \hat{\xi},\ \hat{\psi} \in H^1(I)$, где $I = (0,\ L)$.

$$\varepsilon^2 = \int_0^L \frac{1}{EA}(\hat{\gamma} - \tilde{\gamma}) e_\gamma dx + \int_0^L \left(\hat{\gamma}' + \frac{\hat{\xi}}{R} + F_{ax} \right) e_{ax} dx +$$

$$+ \int_0^L \frac{1}{kGA}\left(\hat{\xi} - \tilde{\xi}\right) e_\xi dx + \int_0^L \left(-\frac{\hat{\gamma}}{R} + \hat{\xi}' + F_{tr} \right) e_{tr} dx +$$

$$+ \int_0^L \frac{1}{EI_s}(\hat{\psi} - \tilde{\psi}) e_\psi dx + \int_0^L \left(\hat{\psi}' - \hat{\xi} + m \right) e_\theta dx$$

Криволинейный стержень Тимошенко: оценка слагаемых, содержащих уравнения равновесия

$$\frac{1}{C^2} \le \inf_{(v_0, w_0, \phi_0)} \frac{\chi^2(v_0, w_0, \phi_0)}{\Delta^2(v_0, w_0, \phi_0)}$$

где $(v_0, w_0, \phi_0) \in H_0^1(\mathrm{I}) \times H_0^1(\mathrm{I}) \times H_0^1(\mathrm{I}),$

$$\chi^2 = \left\| \sqrt{EA} \left(v_0' + \frac{w_0}{R} \right) \right\|^2 + \left\| \sqrt{EI_s} \phi_0' \right\|^2 + \left\| \sqrt{kGA} \left(w_0' + \phi_0 - \frac{v_0}{R} \right) \right\|^2$$

$$\Delta^2 = \left\| C_{ax}^{1/2} v_0 \right\|^2 + \left\| C_{tr}^{1/2} w_0 \right\|^2 + \left\| C_{\theta}^{1/2} \phi_0 \right\|^2$$

Криволинейный стержень Тимошенко: оценка слагаемых, содержащих уравнения равновесия

Выбор констант балансировки:

$$\begin{cases} C_{tr} = \dfrac{kGA}{L^2} \\ C_{ax} = \dfrac{EA}{L^2} \\ C_{\theta} = \dfrac{EI_S}{L^2} \end{cases}$$

Криволинейный стержень Тимошенко: **оценка функционального типа**

$$\varepsilon \le \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$$ или $$\varepsilon^2 \le \left(1+\beta\right) M_1^2 + \left(1+\beta^{-1}\right) M_2^2$$

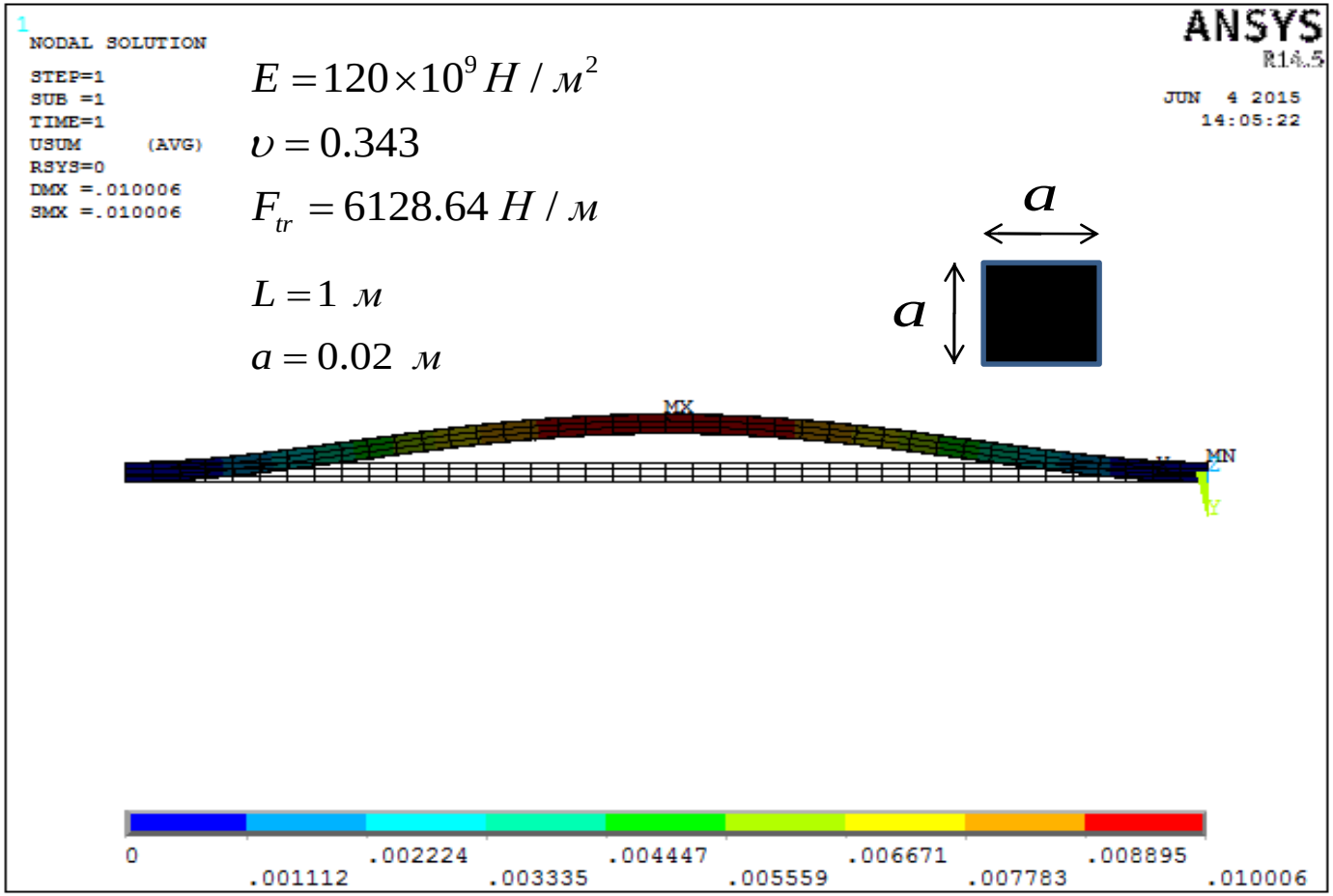
где $\beta > 0,$

$$M_1^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{EA}} \left(\hat{\gamma} - \tilde{\gamma}\right) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{kGA}} \left(\hat{\xi} - \tilde{\xi}\right) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{EI_S}} \left(\hat{\psi} - \tilde{\psi}\right) \right\|^2,$$

$$M_2^2 = C^2 \mathrm{R}^2,$$

$$\mathrm{R}^2 = \left\| C_{ax}^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{\gamma}' + \frac{\hat{\xi}}{R} + F_{ax} \right) \right\|^2 + \left\| C_{tr}^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\hat{\gamma}}{R} + \hat{\xi}' + F_{tr} \right) \right\|^2 + \left\| C_{\theta}^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{\psi}' - \hat{\xi} + m \right) \right\|^2.$$

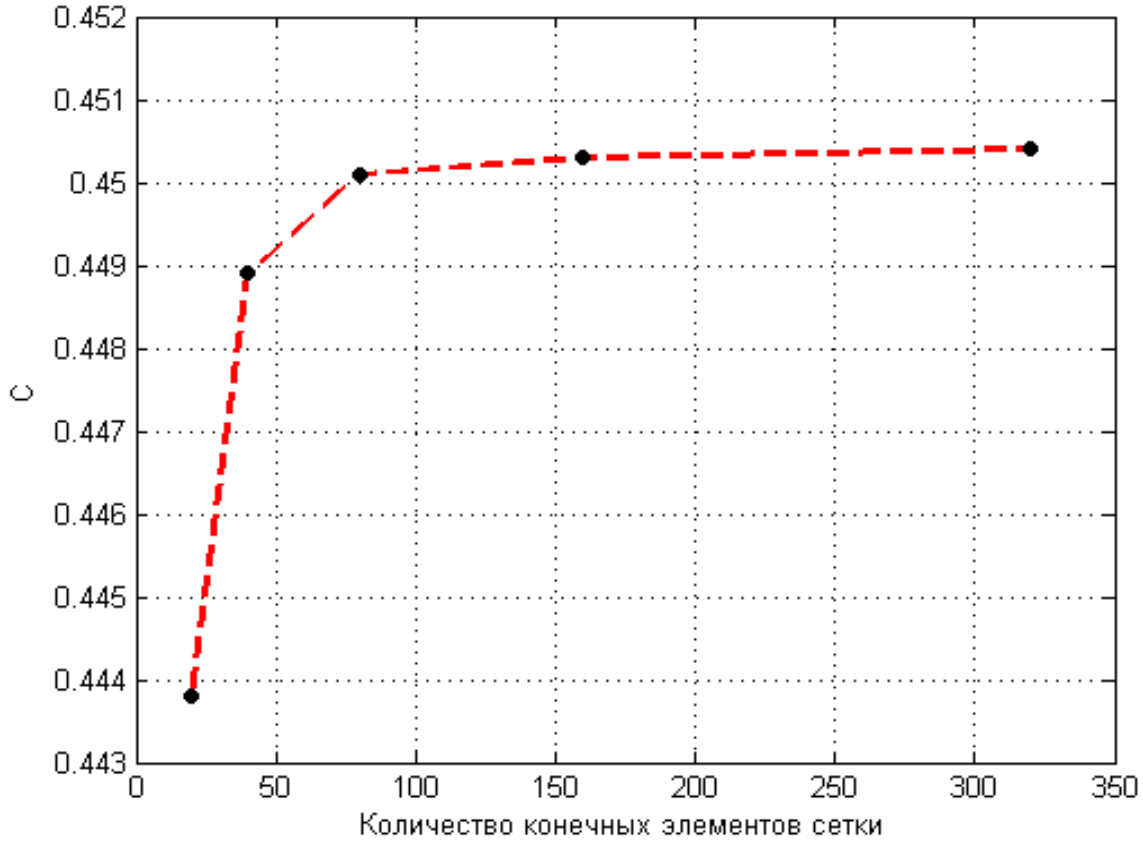
Численный пример 1: тонкий прямолинейный стержень[1]



[1] Frolov, M.E.
Russ. J. Numer. Anal. Math. Model., 2010.

Численный пример 1: тонкий прямолинейный стержень

Вычисление константы C : $C \approx 0.46$.



Численный пример 1: тонкий прямолинейный стержень

$$I_{eff} = \frac{M}{\varepsilon},$$

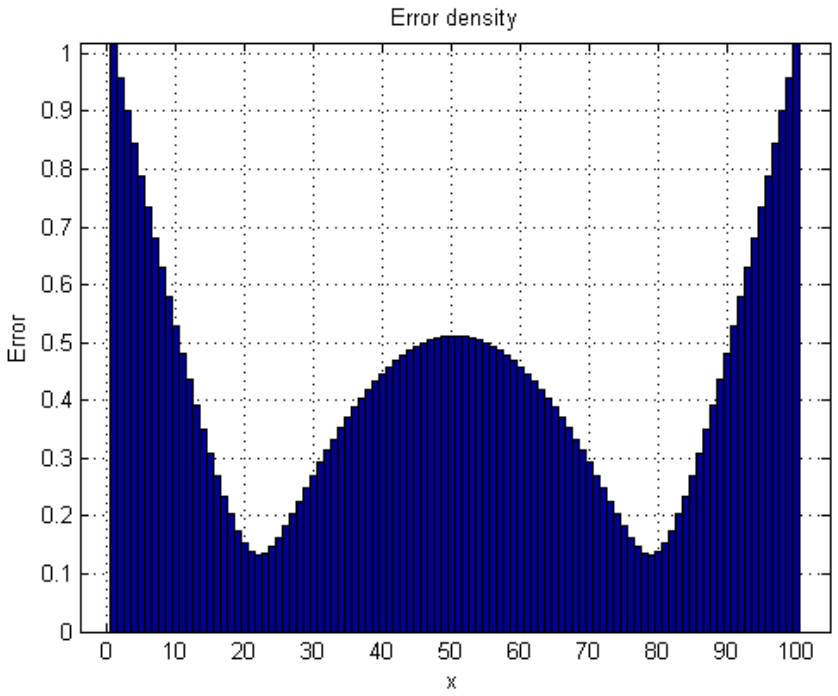
M – значение мажоранты,

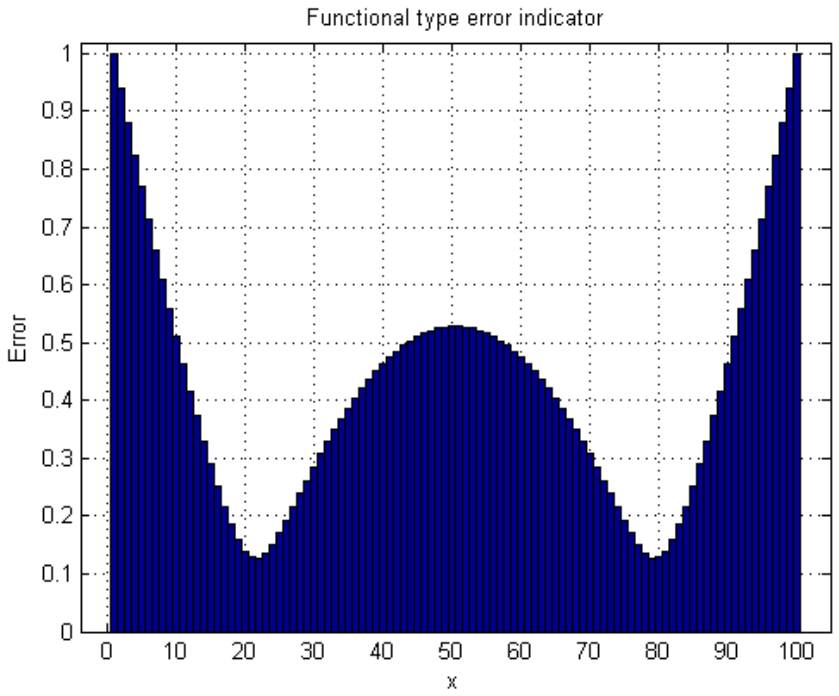
ε – точное значение ошибки.

Число элементов сетки	ε	M	I_{eff}
100	7.91×10^{-2}	7.99×10^{-2}	1.0
200	4.01×10^{-2}	4.05×10^{-2}	1.0
400	2.01×10^{-2}	2.04×10^{-2}	1.0
800	1.01×10^{-2}	1.04×10^{-2}	1.0

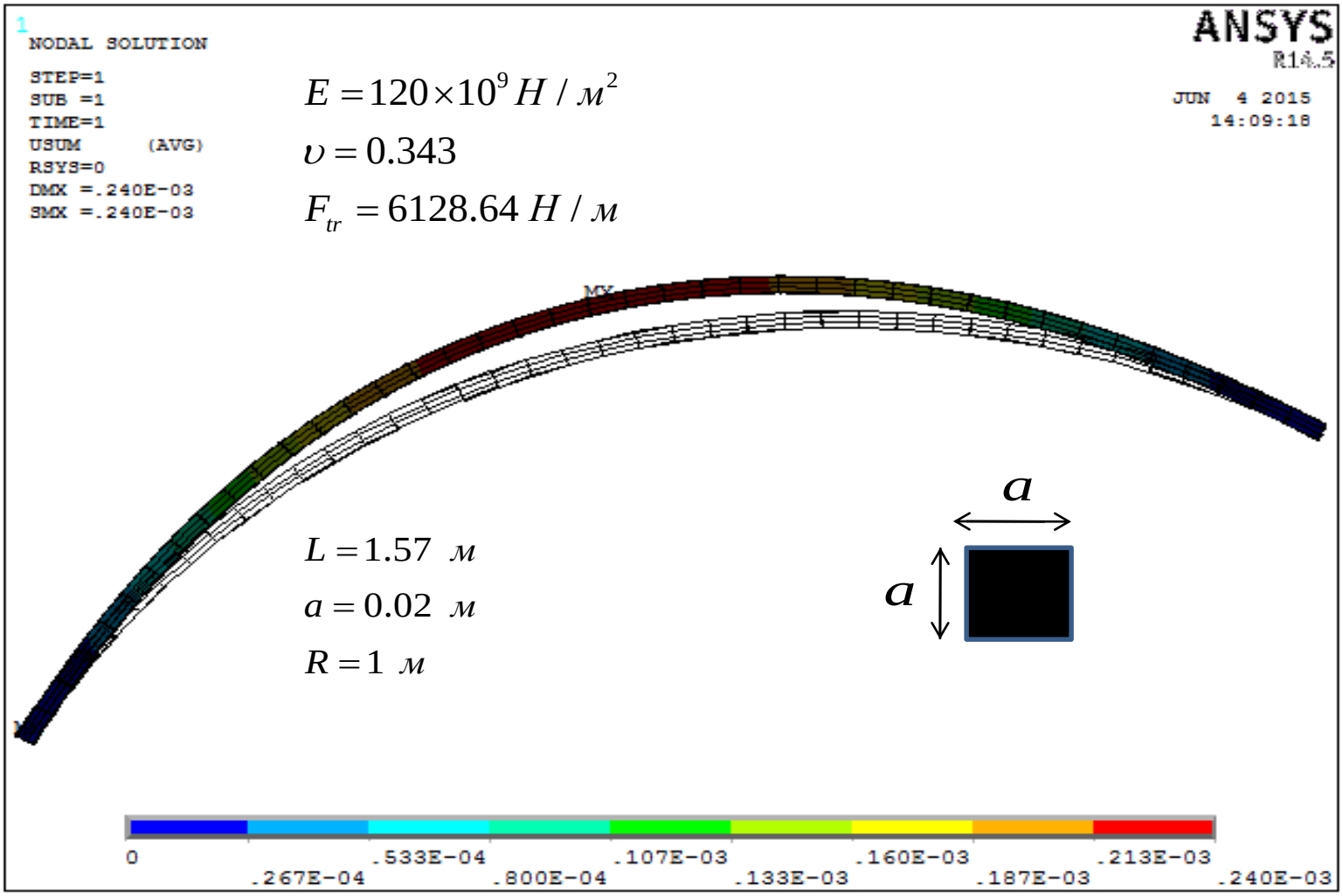
Численный пример 1: тонкий прямолинейный стержень

Локальное распределение ошибки:





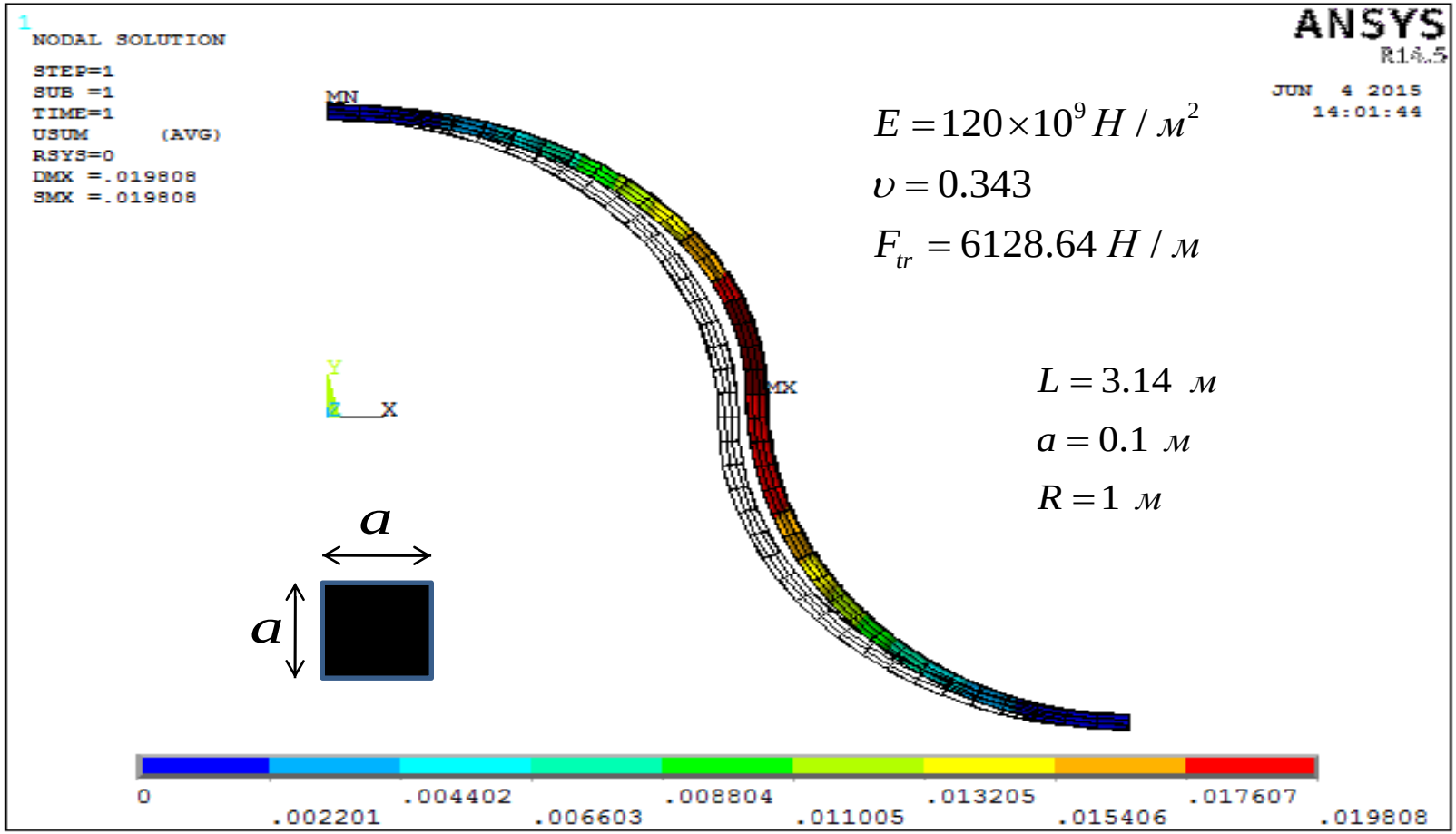
Численный пример 2: тонкий криволинейный стержень



Численный пример 2: тонкий криволинейный стержень

Число элементов сетки	ε	M	l_{eff}
100	7.87×10^{-6}	8.58×10^{-6}	1.1
200	3.96×10^{-6}	4.36×10^{-6}	1.1
400	2.02×10^{-6}	2.22×10^{-6}	1.1
800	1.07×10^{-6}	1.20×10^{-6}	1.1

Численный пример 3: изогнутый стержень средней толщины



$$E = 120 \times 10^9 \, H / м^2$$

$$\upsilon = 0.343$$

$$F_{tr} = 6128.64 \, H / м$$

$$L = 3.14 \ м$$

$$a = 0.1 \ м$$

$$R = 1 \ м$$

Численный пример 3: изогнутый стержень средней толщины

Число элементов сетки	ε	M	I_{eff}
100	11.6×10^{-2}	14.3×10^{-2}	1.2
200	5.93×10^{-2}	7.31×10^{-2}	1.2
400	2.98×10^{-2}	3.73×10^{-2}	1.3
800	1.74×10^{-2}	2.25×10^{-2}	1.3

Заключение

- Выведена функциональная апостериорная оценка для задачи об изгибе криволинейного стержня Тимошенко;

- Полученная оценка реализована в программном комплексе MATLAB, полученные на серии модельных задач результаты согласуются с ее теоретическими свойствами.

Дальнейшие направления исследования

- Обобщение полученных результатов на случай произвольных граничных условий;
- Сравнительный анализ полученной оценки с классическими на основе примеров из литературы;
- Переход к двумерным моделям механики твердого тела, возникающим в теории пластин.

Спасибо за внимание!