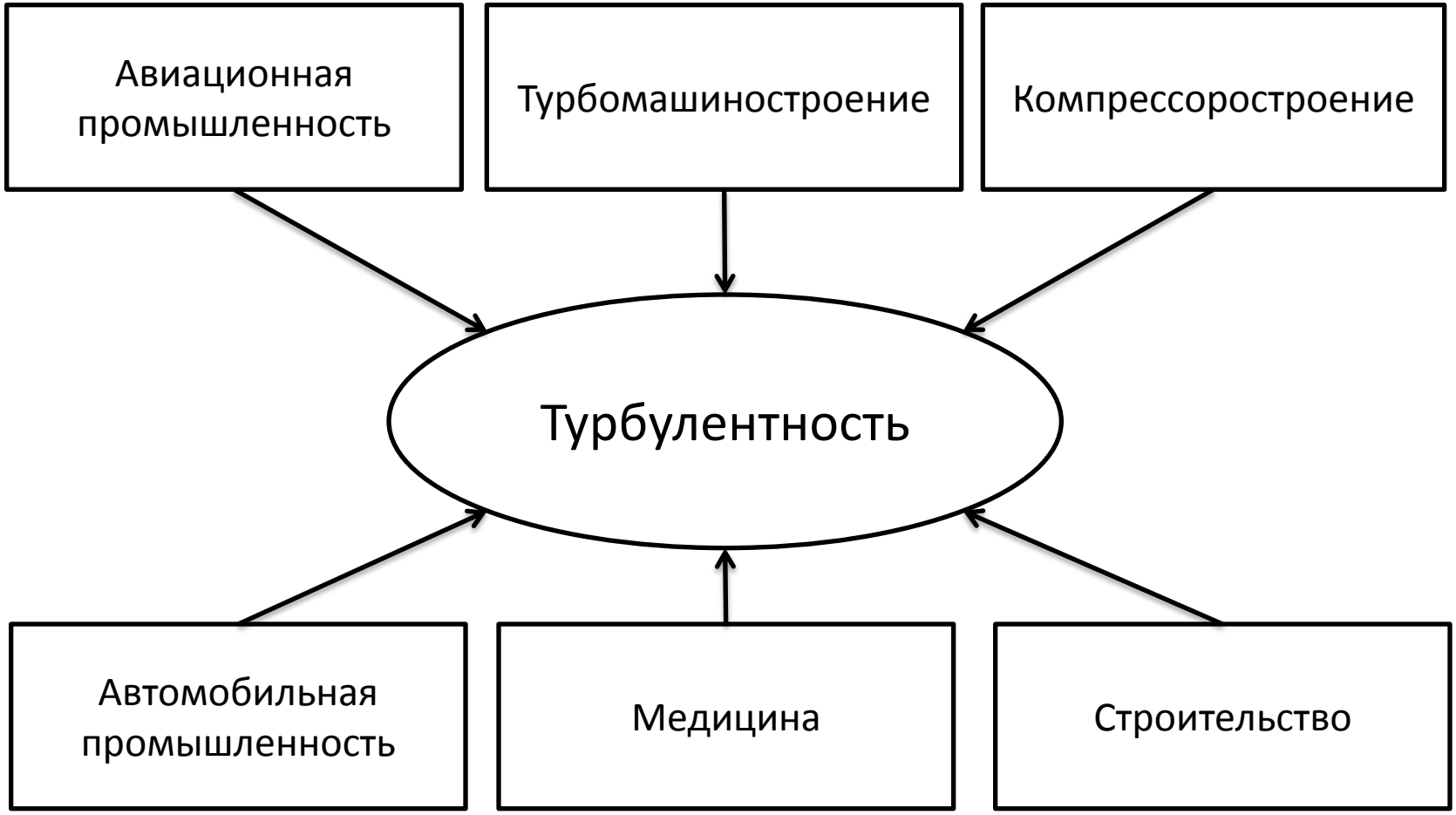
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Кафедра прикладной математики

Моделирование турбулентных течений на вращающемся диске и сравнение с экспериментом

Выполнил студент группы 63601/3 Рубцов А.О.

Научный руководитель Болдырев Ю.Я.

Актуальность



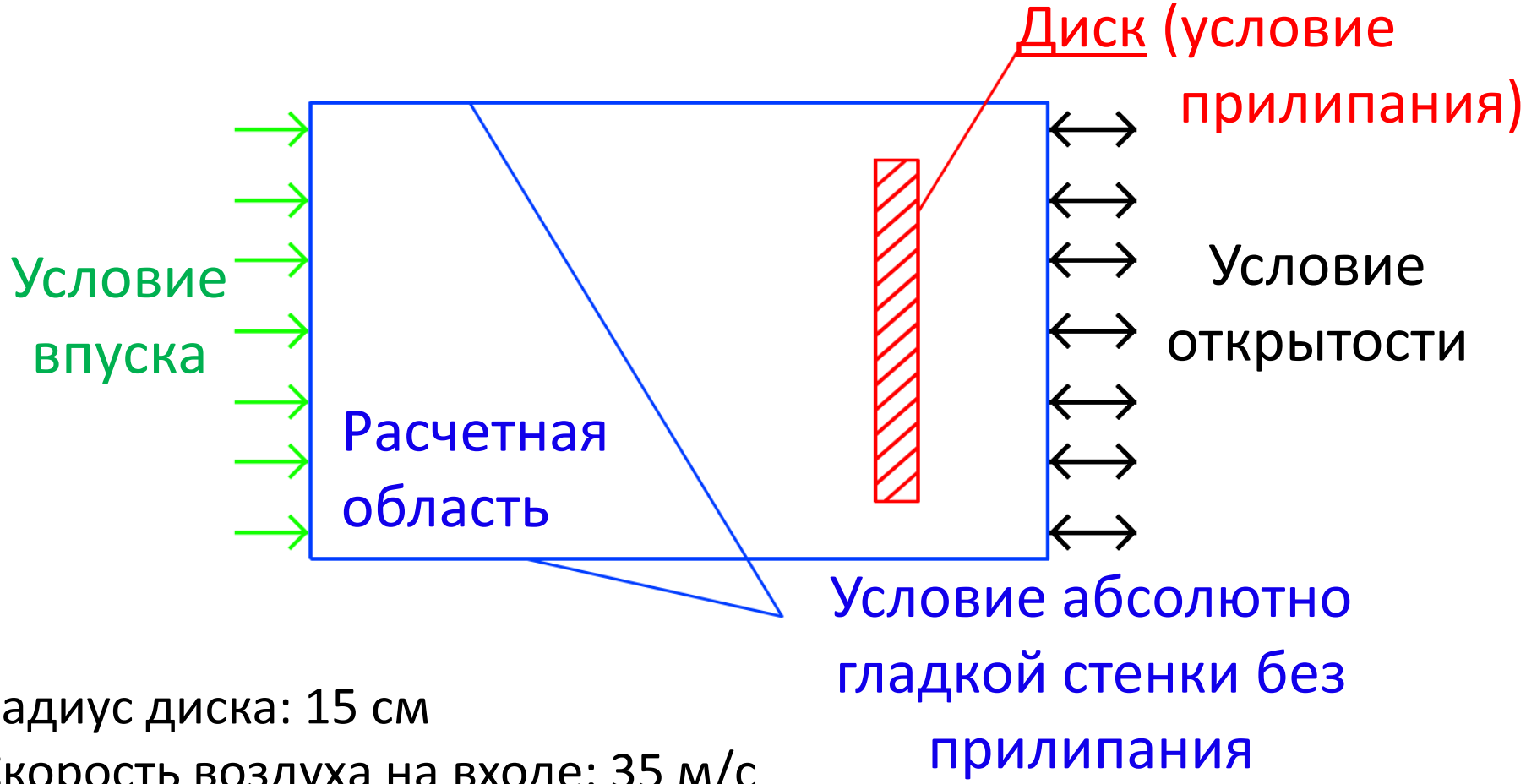
Цель работы

Тестирование моделей турбулентности в интересах прикладных и научных исследований

Задачи

- Рассмотрение наиболее востребованных моделей турбулентности
- Тестирование рассматриваемых моделей турбулентности на примере конкретной задачи

Постановка задачи

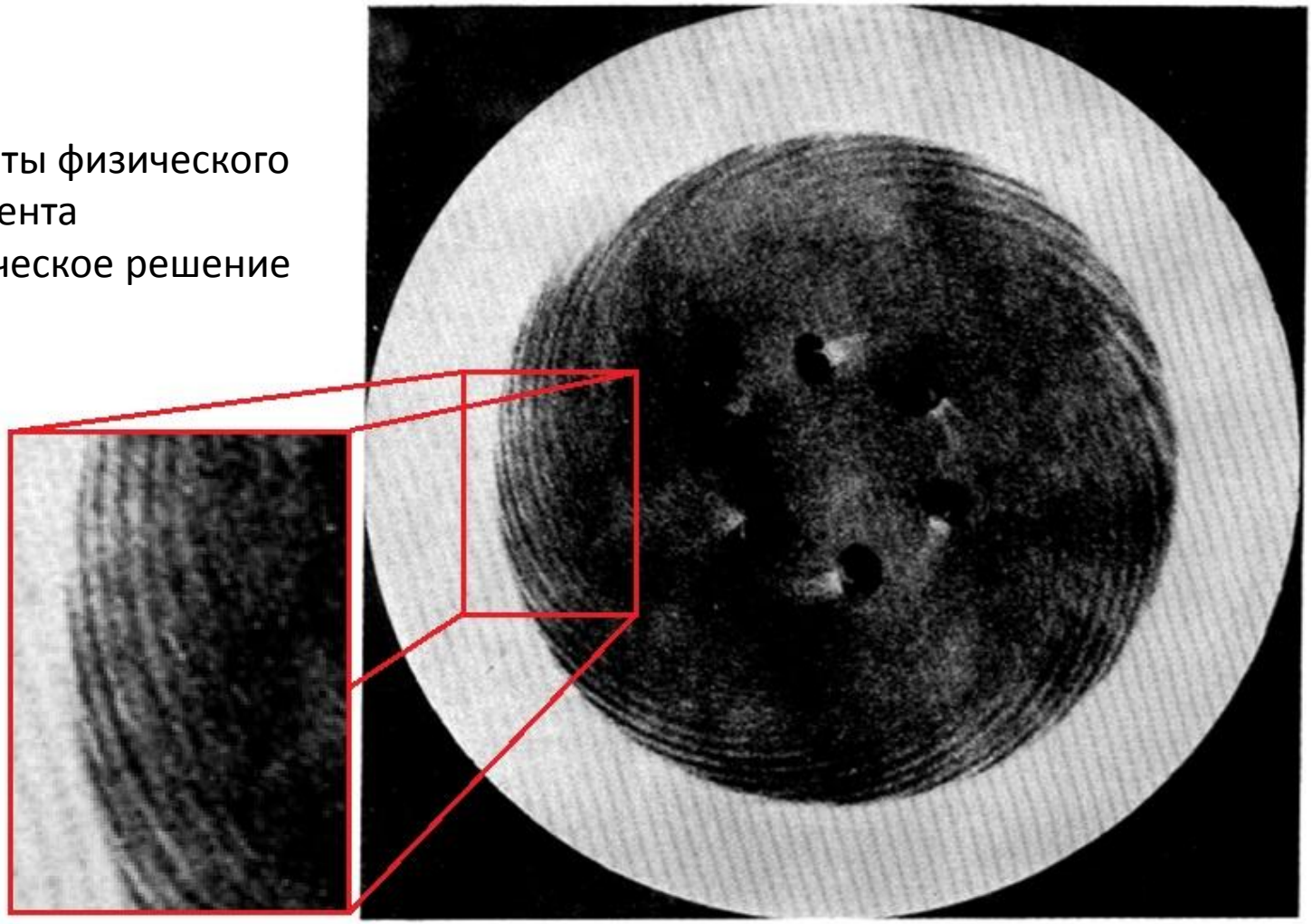


Радиус диска: 15 см
Скорость воздуха на входе: 35 м/с
Скорость вращения диска: 3200 об/мин

Данные физического эксперимента

N. Gregory, G.T. Stuart, W.S. Walker “On the Stability of Three-Dimensional Boundary Layers with Application to the Flow Due to Rotating Disk” 1955

- Результаты физического эксперимента
- Теоретическое решение



Параметры расчета

- Критерий сходимости: **$\varepsilon < 10^{-6}$**
- Используемое число ядер вычислительного кластера: от **8** до **64**
- Используемый программный комплекс: **ANSYS-CFX**
- Используемые модели турбулентности: **SST, SA, RNG, LES**

Характеристика течения:

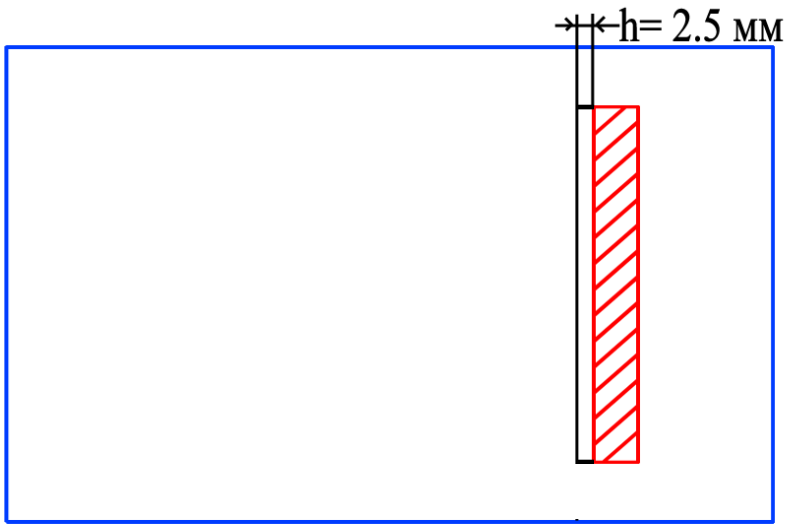
Число Рейнольдса: Re > 300 000

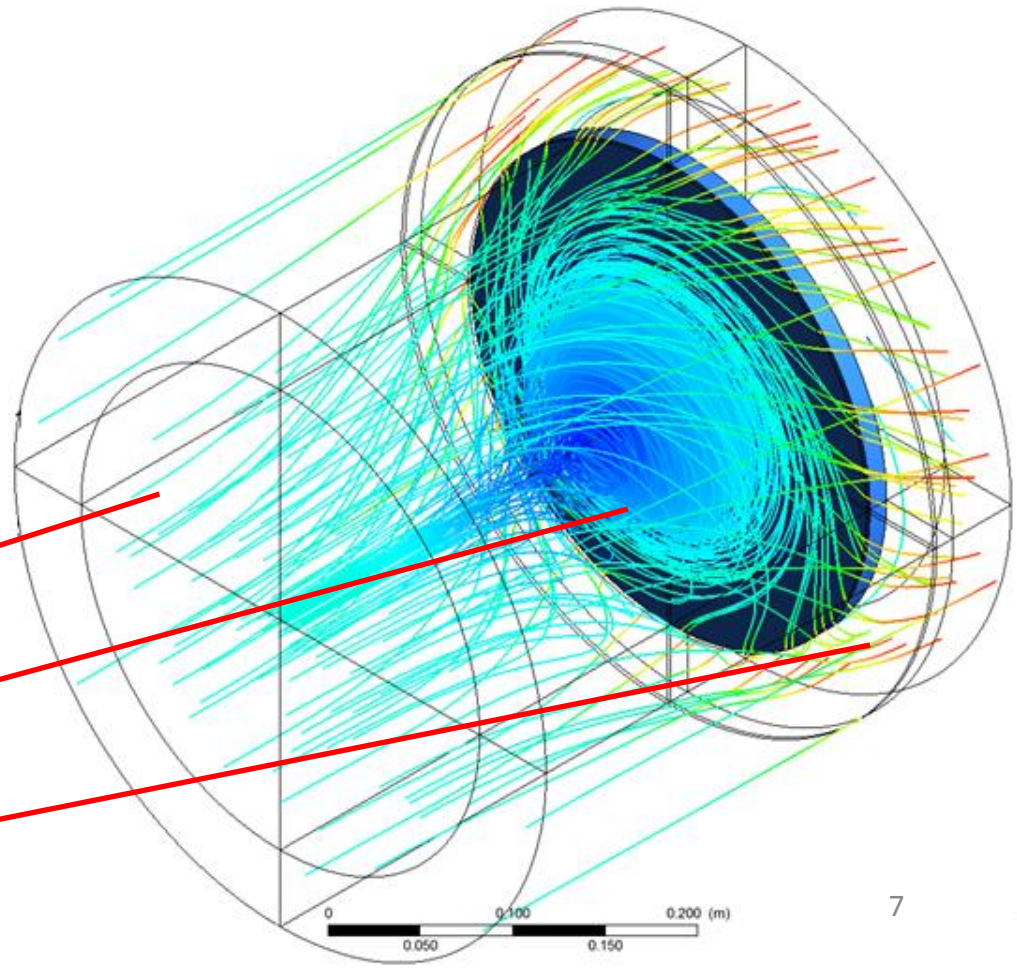
$$\mathrm{Re} = \frac{V_\tau \cdot r}{\nu}, \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Результаты

Первый вариант разбиения расчетной области

Для этого варианта были построены сетки, содержащие от 2.4 млн. до 13 млн. элементов





Ламинарный режим

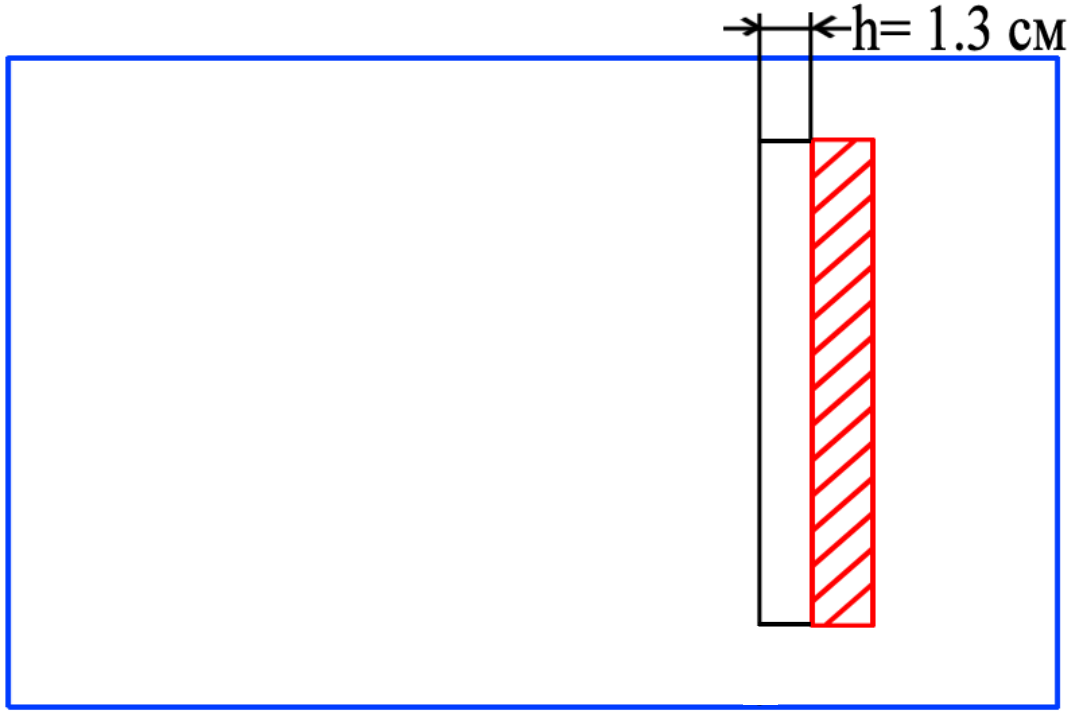
Переходный режим

Турбулентный режим

Результаты

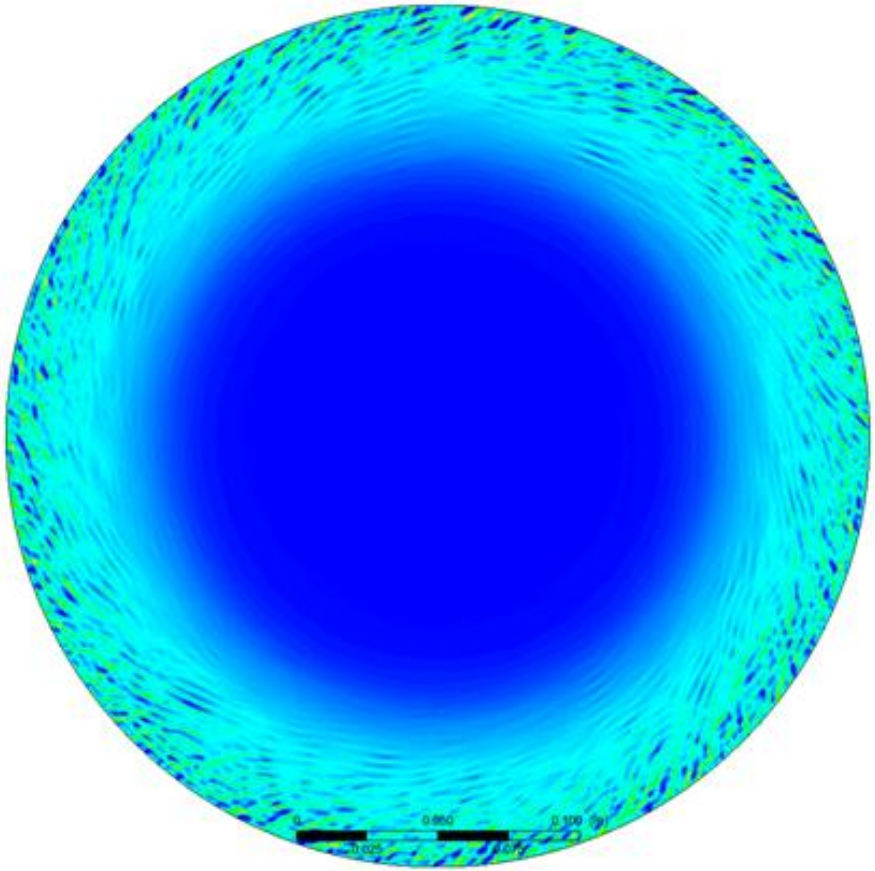
Второй вариант разбиения расчетной области

Расчетная сетка: 9.1 млн. элементов

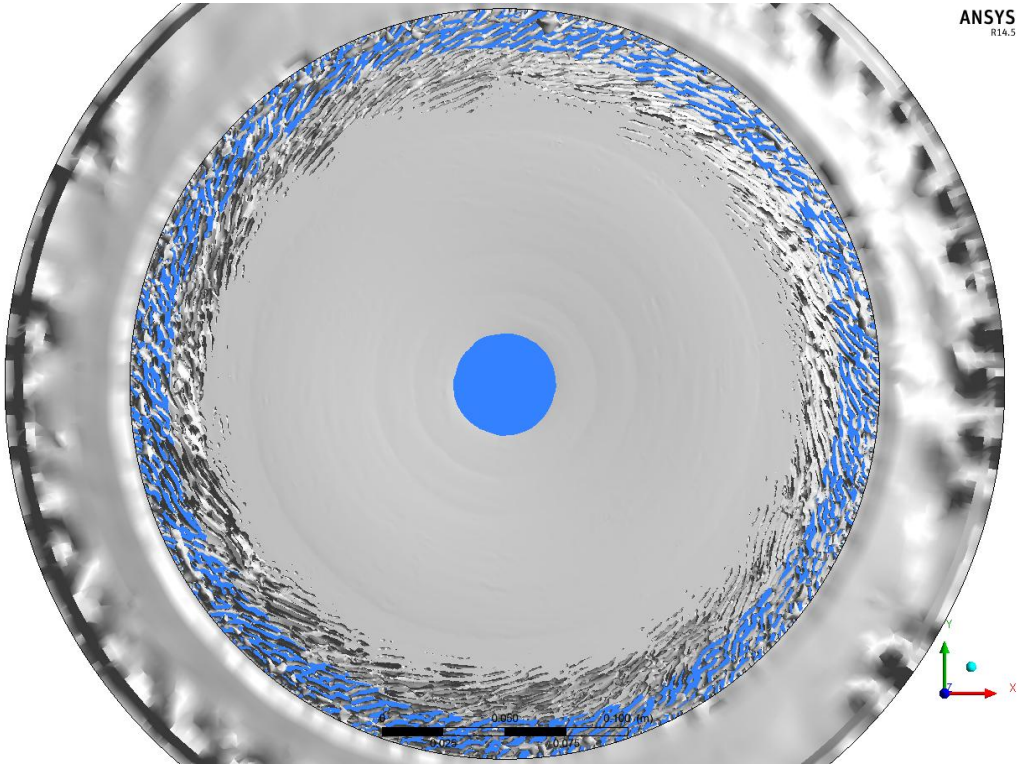


Результаты

Решение стационарной задачи



Значение завихренности (перед диском)

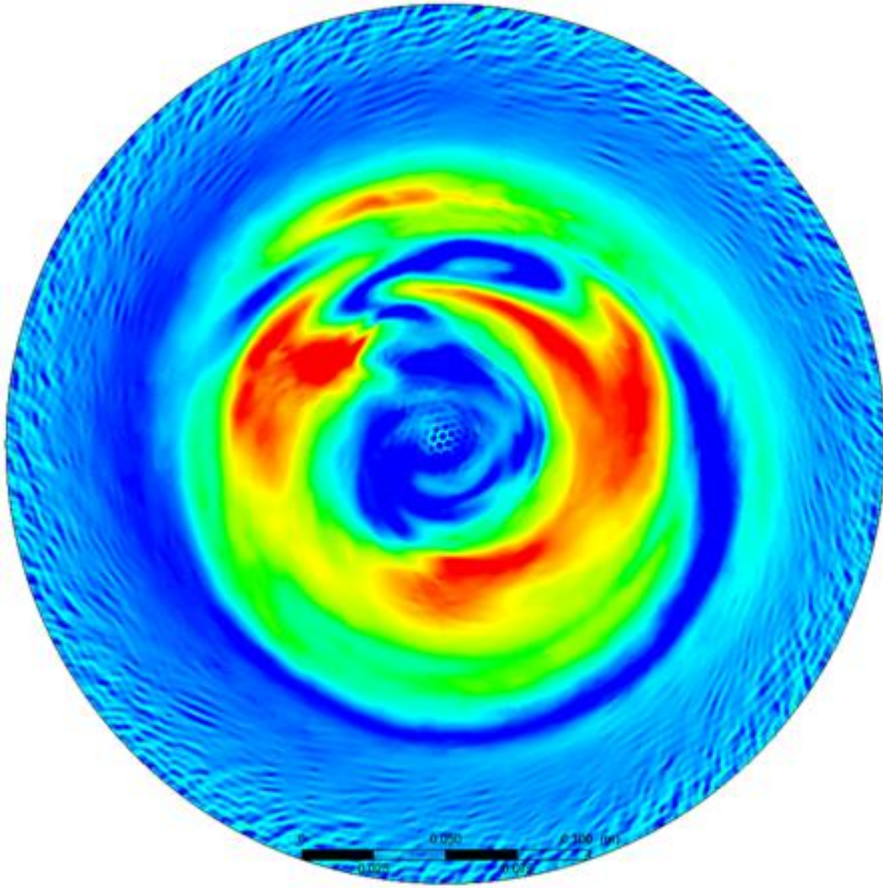


Изоповерхность завихренности

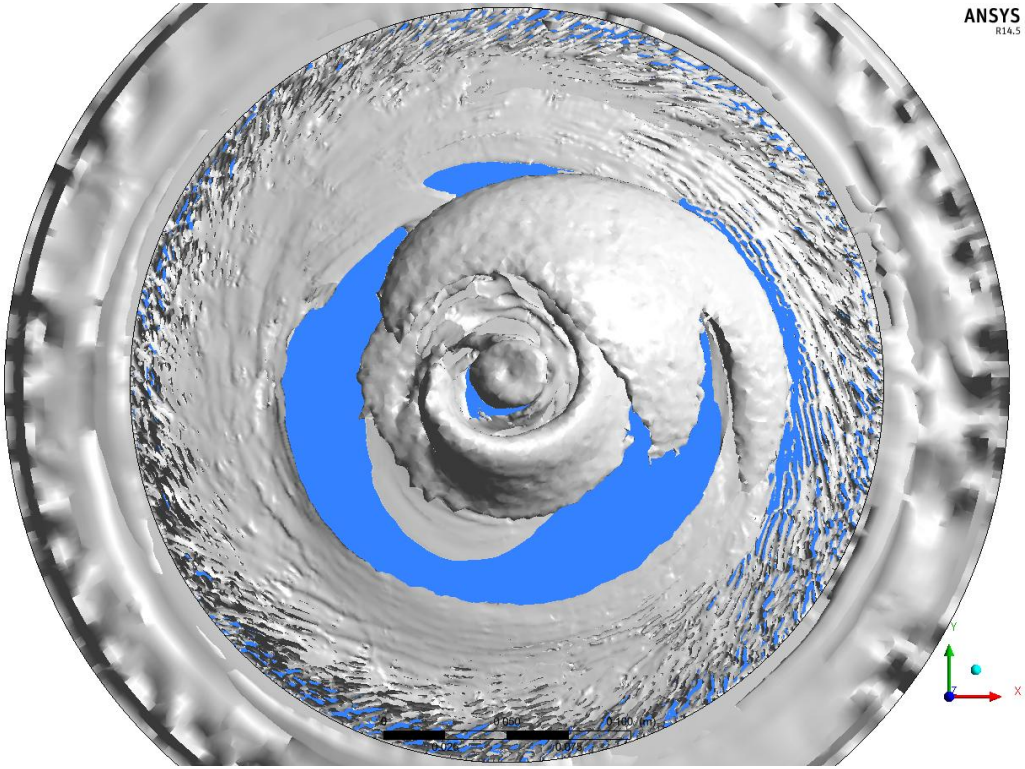
Приведен результат для SST модели турбулентности

Результаты

Решение нестационарной задачи



Значение завихренности (перед диском)

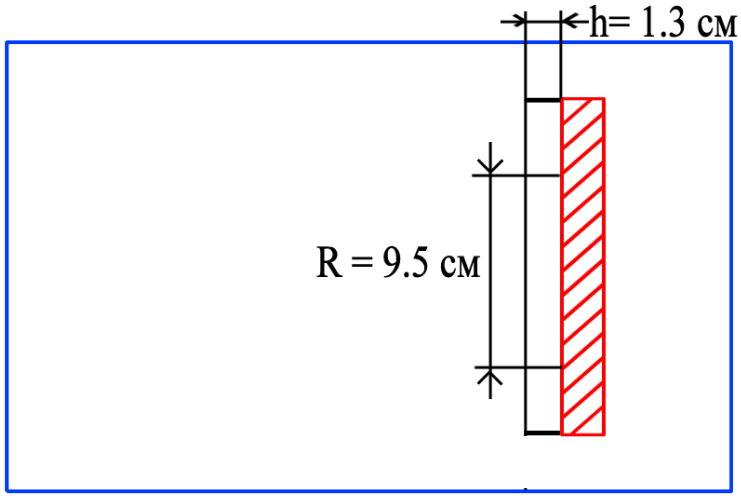


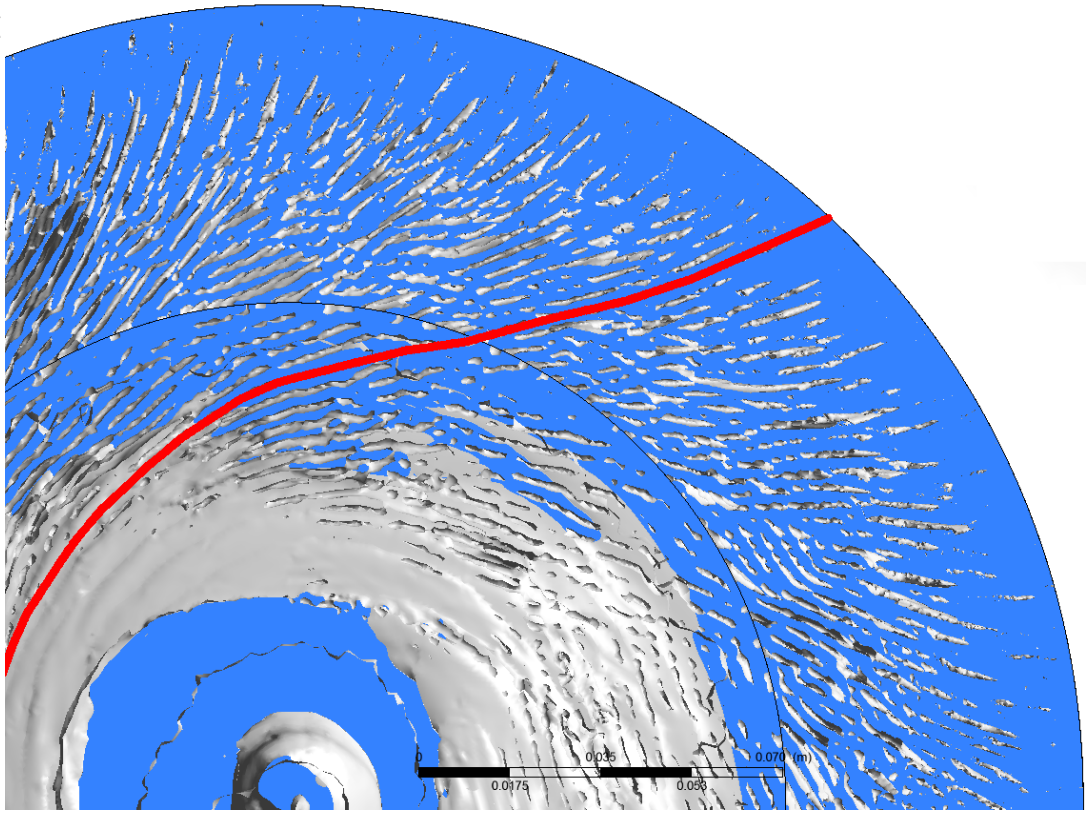
Изоповерхность завихренности

Приведен результат для LES модели турбулентности

Результаты

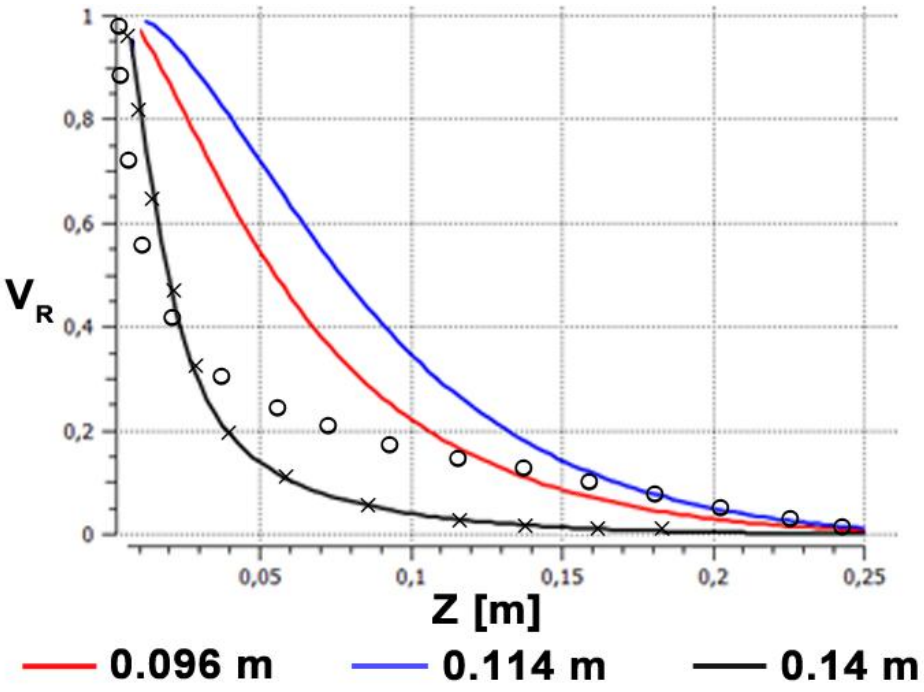
Для третьего варианта разбиения расчетной области была построена сетка размером 11.8 млн. элементов

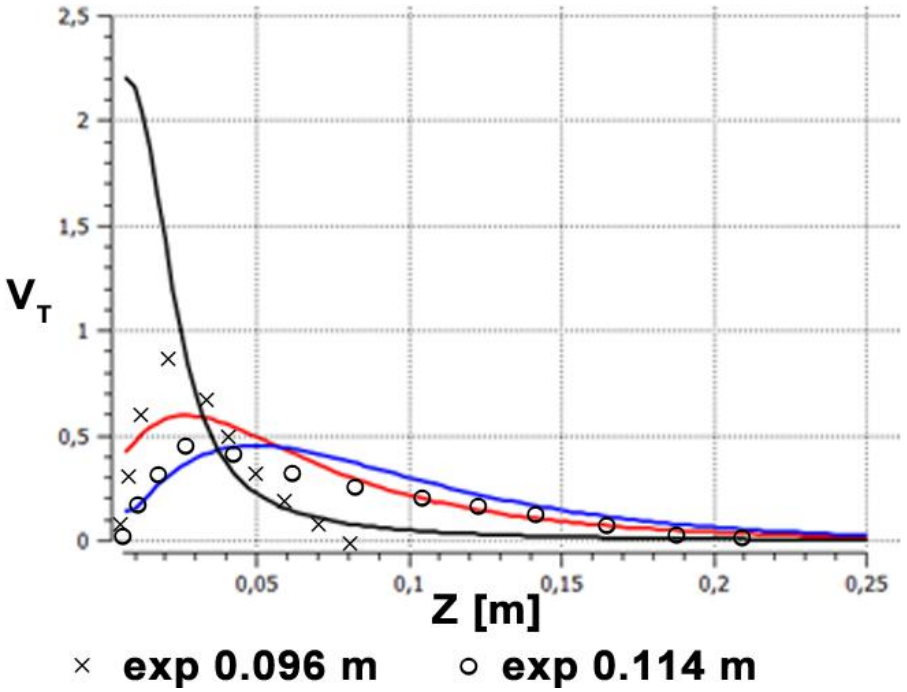




Приведен результат для LES модели турбулентности

Сравнение с экспериментом





Выводы

- Полученные результаты для всех рассмотренных моделей качественно совпадают с результатами физического эксперимента
- Эффективность рассмотренных моделей сильно зависит от качества расчетных сеток

Спасибо за внимание

Приложение 1

Осредненные уравнения Навье-Стокса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_m + \tau_t) \\ \dfrac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot [\vec{u} \cdot (\tau_m + \tau_t) + (\overrightarrow{q_m} + \overrightarrow{q_t})] \\ \rho = pm/(RT) \end{cases}$$

u - вектор скорости осредненного течения

τ_m и τ_t - молекулярная и турбулентная составляющие тензора вязких напряжений

E – полная энергия газа, H – полная энтальпия (термодинамический потенциал); T – температура

$\vec{q}_m$ и $\vec{q}_t$ - молекулярная и турбулентная составляющие вектора плотности теплового потока

R– универсальная газовая постоянная

m – молярная масса газа.

C_p - удельная теплоемкость газа при постоянном давлении

Приложение 2

Shear Stress Transport (SST) модель турбулентности

Модель содержит два дифференциальных уравнения:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_T)\nabla k] + P_k - \beta^* \rho \omega k$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_\omega \mu_T)\nabla \omega] + \gamma \frac{\rho}{\mu_T} P_k - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega}$$

$$P_k = \min(\mu_t S^2, 20\beta^* \rho k \omega), S^2 = 2S_{ij}S_{ij}, D_{k\omega} = \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega}(\nabla k)\cdot(\nabla \omega)$$

$$\mu_T = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \sigma_k = F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1)\sigma_{k2}, \sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1)\sigma_{\omega 2}, \beta = F_1 \beta_1 + (1 - F_1)\beta_2$$

$$F_1 = \tanh(\arg^4{}_1), \arg_1 = \min[\max(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500v}{d^2{}_w \omega}), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2{}_w}]$$

$$F_2 = \tanh(\arg^2{}_2), \arg_2 = \max(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500v}{d^2{}_w \omega})$$

$$CD_{k\omega} = \max\{D_{k\omega}, 10^{-20}\}$$

d_w- ближайшее расстояние до твердой стенки

Приложение 3

Spalart-Allmaras (SA) модель турбулентности

Модель содержит одно дифференциальное уравнение переноса:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} = P^{\nu} - D^{\nu} + \frac{1}{\sigma}\{\nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu})\nabla \tilde{\nu}] + c_{b2}[(\nabla \tilde{\nu}) \cdot (\nabla \tilde{\nu})]\} + f_{t1}\Delta U^2$$

$\tilde{\nu}$ - модифицированная кинематическая турбулентная вязкость

$\nu_t = \mu_t / \rho$ - «истинная» турбулентная вязкость

ν - молекулярная вязкость газа

$$\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu},\ f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c^3_{\mathrm{v1}}},\ \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

$\mathrm{d_w}$ - ближайшее расстояние до твердой стенки

$$P^{\nu} = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu},\ D^{\nu} = (\mathrm{c_{w1}} f_{\mathrm{w}} - \frac{\mathrm{c_{b1}}}{\kappa^2}\mathrm{f_{t2}})(\frac{\tilde{\nu}}{\mathrm{d_w}})^2$$

κ - постоянная Кармана

$$\tilde{\mathrm{S}} = \Omega + f_{\nu 2}\frac{\tilde{\nu}}{\mathrm{k}^2\mathrm{d}^2_{\mathrm{w}}},\ f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\mathrm{v1}}},\ \Omega = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2},\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j})$$

$$f_w = g(\frac{1 + c^6_{w3}}{g^6 + c^6_{w3}})^{1/6},\ g = r + c_{w2}(r^6 - r),\ r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2_w}$$

$$f_{t1} = C_{t1} g_t \cdot \exp(-C_{t2}\frac{\omega^2_t}{\Delta U^2}(d^2_w + g^2_t d^2_t)),\ f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4}\chi^2)$$

Приложение 4
RNG модель турбулентности

Модификация k-ε модели. Содержит два дифференциальных уравнения:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\nabla(\rho k u)=\nabla\cdot[(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_k})\nabla k]+P_k-\rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\nabla(\rho\varepsilon u)=\nabla\cdot[(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon})\nabla\varepsilon]+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P_k-C^*_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$C^*_{2\varepsilon}=C_{2\varepsilon}+\frac{C_\mu\eta^3(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3},\eta=\frac{\Omega k}{\varepsilon},\Omega=(2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2},\Omega_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial u_j}{\partial x_j})$$

$\mu_T=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$ – турбулентная вязкость $P_k=2\mu_t\Omega$

u – скорость газа

E_{ij} – компоненты

Приложение 5
LES модель турбулентности

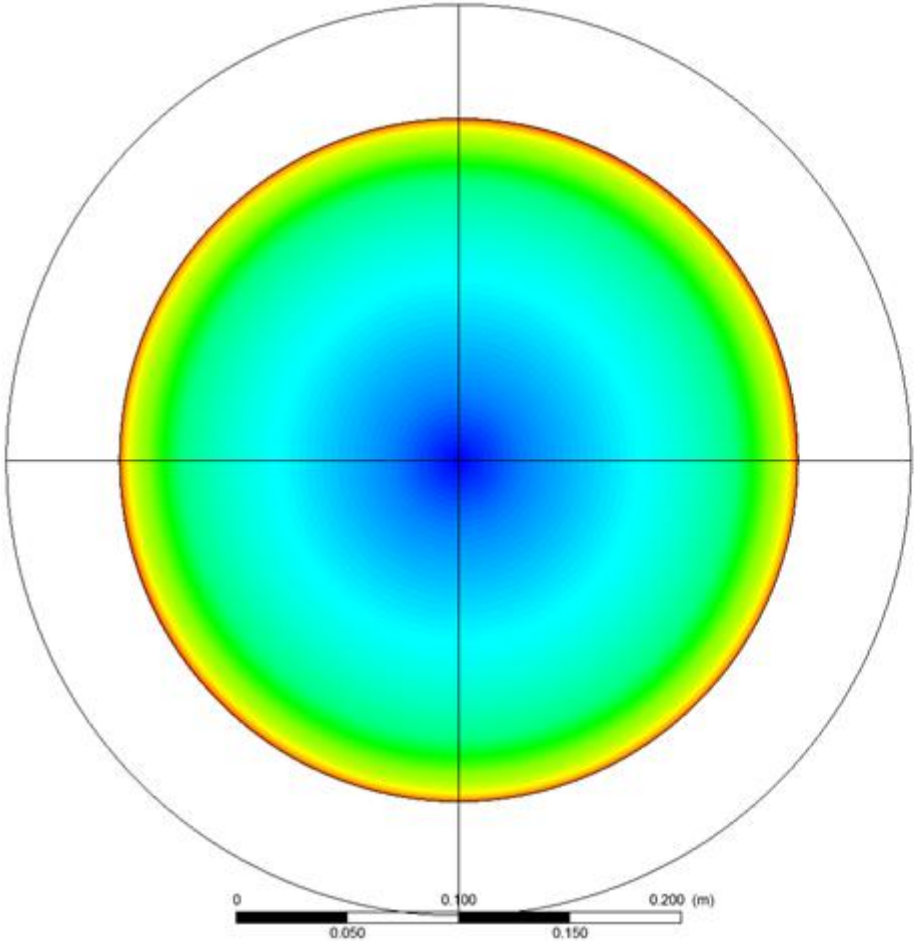
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_m + \tau_{SGS}) \\ \dfrac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot [\vec{u} \cdot (\tau_m + \tau_{SGS}) + (\vec{q}_m + \vec{q}_{SGS})] \end{cases}$$

$$\tau_{SGS} = 2\mu_{SGS}(S - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{u})I) + \frac{2}{3}k_{SGS}I,$$

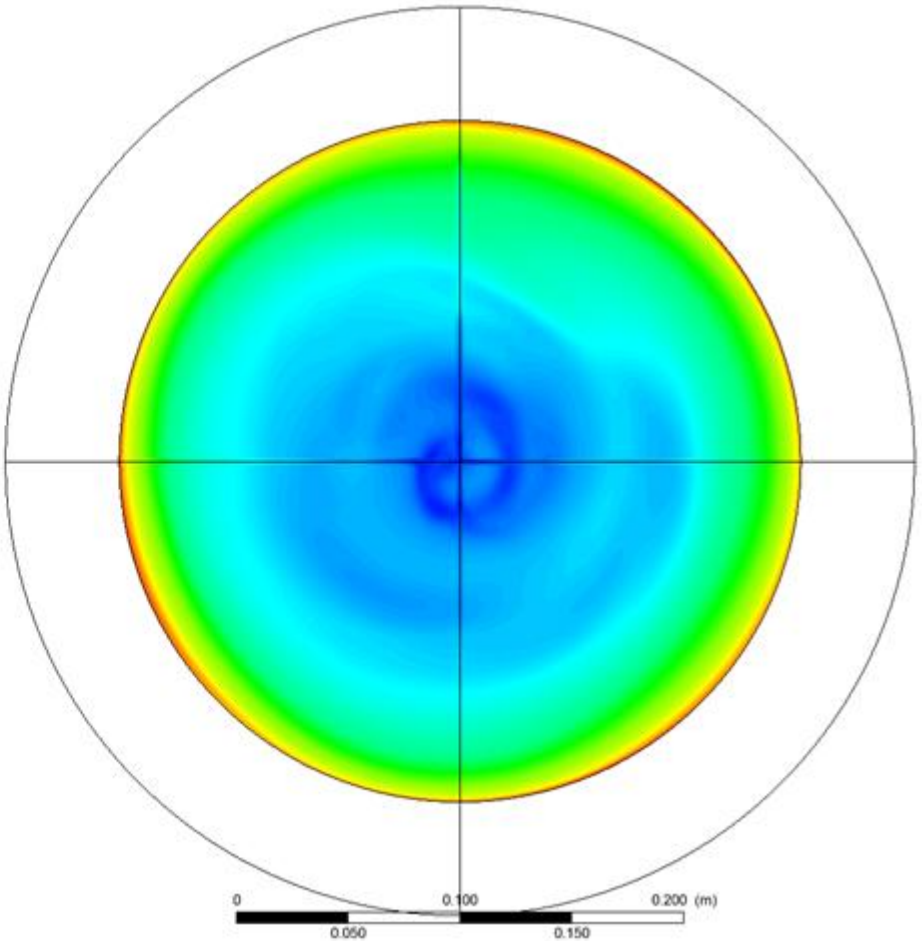
$$\vec{q}_{SGS} = -\lambda_{SGS}\nabla T$$

Приложение 6

Значение скорости на срезе перед диском
(1 вариант разбиения расчетной области)



Стационарное решение (SST)



Нестационарное решение (LES)

Приложение 7

Значение компонент скорости в точке с переходным режимом течения для различных моделей турбулентности.

	u (m/s)	v (m/s)	w (m/s)
SST	20.91	18.91	-25.44
SA	20.84	19.09	-25.51
RNG	20.83	19.06	-25.48
LES	20.77	19.26	-25.54

Сравнительная таблица по времени расчета для сетки из 11.8 млн. элементов, на 64 процессорах вычислительного кластера, для стационарных решений

Модель	Время расчета	%
SST	54:45	100%
SA	46:50	85.54%
RNG	52:33	95.98%