Гарантированные оценки погрешности для итерационных методов линейной алгебры и метода Пикара–Линделёфа

Светлана Мацулевич
Научный руководитель проф. С.И.Репин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Физико-механический факультет
Кафедра прикладной математики

20 июня 2012 г.

Актуальность

Абстрактная задача с точным решением u. Пусть

$$\underset{\text{приближенное решение}}{u_h} \quad \longleftarrow \quad \underset{\text{погрешность приближения}}{e = u - u_h}$$

$$\Downarrow$$

СОЗДАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ С НЕДЕЖНЫМ КОНТРОЛЕМ ТОЧНОСТИ

ИГРАЮТ ВАЖНУЮ РОЛЬ

В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ.

Цель работы

Исследование поведения гарантированных оценок Островского для

- итерационных схем, используемых для решения задач линейной алгебры;
- итерационных схем интегрирования по методу Пикара–Линделёфа для решения систем ОДУ.

Структура работы

1. Априорные и апостериорные оценки для сжимающего оператора.
2. Комбинирование оценок Островского с классическими итерационными схемами.
3. Построение надежного итерационного метода, объединяющего метод Пикара–Линделёфа и апостериорные оценки:
   - основная идея метода и ее обоснование,
   - сложности, возникающие на практике, и их разрешение.

Теорема Островского

Пусть последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ получена при помощи сжимающего оператора $\mathcal{T}$ с константой q и неподвижной точкой $x_\odot$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$M_i^{\ominus} := \frac{1}{1+q}\|x_i - x_{i+1}\|_X \leqslant \|x_\odot - x_i\|_X \leqslant \frac{q}{1-q}\|x_i - x_{i-1}\|_X =: M_i^{\oplus}.$$

Следствие (оптимизация оценок Островского)

$$M_i^{\ominus,P} := \sup_{p=1,\dots,P}\left\{\frac{1}{1+q^p}\|x_i - x_{i+p}\|_X\right\},$$

$$M_i^{\oplus,P} := \inf_{p=1,\dots,P}\left\{\frac{1}{1-q^p}\|x_i - x_{i+p}\|_X\right\}.$$

где P — число соседних элементов последовательности.

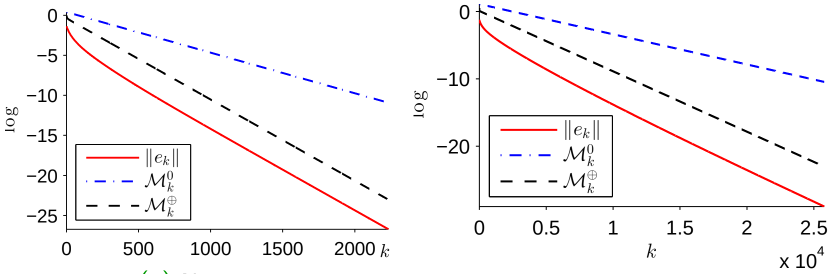
Комбинирование оценок Островского с классическими итерационными схемами

Для решения системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ — невырожденная матрица, итерационный процесс задается следующей **канонической формой**:

$$B^{k+1}\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f\,, \quad k = 1, ..., n: \tag{1}$$

1. *стационарный* метод,
2. метод *Ричардсона*,
3. метод *Чебышева*.

$$\boxed{B\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+Ax_k=f} + \left\{\begin{array}{l} \|\mathbf{x_k}-\mathbf{x_\odot}\|_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \leqslant \mathbf{M}_\mathbf{k}^\mathbf{0} := \frac{\mathbf{q}^\mathbf{k}}{\mathbf{1}-\mathbf{q}}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_{\mathbf{A},\mathbf{B}}, \\ \quad \text{где } \|x\|_C := \sqrt{(Cx,x)},\ C\in\mathbb{M}_{n\times n}; \\ \|\mathbf{x_k}-\mathbf{x_\odot}\|_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \leqslant \mathbf{M}_\mathbf{k}^\oplus := \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1}-\mathbf{q}}\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x_{k-1}}\|_{\mathbf{A},\mathbf{B}}, \\ \quad \text{где } q=\frac{1-\kappa}{1+\kappa},\ \kappa=\frac{\mu_{min}}{\mu_{max}} \text{ и } \tau=\frac{2}{\mu_{min}+\mu_{max}} \\ \qquad \mu_{min}B\leqslant A\leqslant\mu_{max}B,\quad \mu_{min},\mu_{max}>0. \end{array}\right.$$



(a) N = 100 (b) N = 1000

Рис.: Априорная оценка, апостериорная оценка и погрешность решения.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-(x^2+y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(x+y+2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(x+y+4)u = f(x,y)$$

$$\Omega =]0.2, 3.3[\times]0.5, 4.2[, \quad u = \phi(x,y) \text{ на } \partial\Omega$$

с решением $u(x,y) = (x^2-3x)(y^2-4y)$.

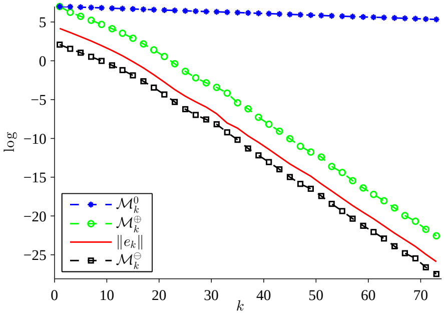


Рис.: Погрешность решения и оценки $M_k^{\ominus}$, $M_k^{\oplus}$, M_k^0 полученные при помощи метода верхней релаксации, $n = 288$.

Предположение

о построение гарантированного метода решения **эволюционного класса задач** при помощи метода Пикара–Линделёфа.

Рассмотрим модельную задачу

найти вектор-функцию $u(x,t)$, где

- $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ — Липшицева;
- $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$;
- $S_T := \partial\Omega \times [0,T]$.

$$\begin{aligned} u_t &= \mathcal{A}u + f \qquad && (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) &= \varphi(x), && x \in \Omega \\ u(x,t) &= 0, && (x,t) \in S_T, \end{aligned} \tag{2}$$

где $A : U \to U'$, $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

Мы рассматриваем идею на примере использования метода Пикара–Линделёфа для решения **систем ОДУ** с гарантированной точностью.

найти вектор-функцию $u \in C^1([0, T])$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = \varphi(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_K], \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varphi(t, u)$ — Липшицева по u и непрерывная по t функция.

Описание метода

Метод объединяет

- итерационный метод Пикара–Линделёфа для решения ОДУ и
- двухсторонние апостериорные оценки (полученные из теоремы Островского).

Идея метода

Представим дифференциальное уравнение в интегральной форме и решим его итерационным методом

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s, u(s))\, ds + u_0, \tag{4}$$

при следующих ограничениях на φ

- $\varphi(t, p)$ — **непрерывная** по t на
$$Q = \{t_0 \leqslant t \leqslant t_N, u_0 - \Delta \leqslant p \leqslant u_0 + \Delta\}$$
- $\varphi(t, p)$ удовлетворяет неравенству Липшица $\forall (t_1, u_1), (t_2, u_2) \in Q$

$$\|\varphi(t_2, u_2) - \varphi(t_1, u_1)\|_{C([t_1,t_2])} \leqslant \leqslant L_1 \|u_2 - u_1\|_{C([t_1,t_2])} + L_2 \,|\, t_2 - t_1 \,| \,. \tag{5}$$

Решаем задачу при помощи итерационной схемы с оператором $\mathcal{T} : X \to X$:

$$u_j = \mathcal{T} u_{j-1} + u_0, \quad j = 1, ..., . \tag{6}$$

Если $\mathcal{T}$ —**сжимающий** оператор с константой $\mathbf{q}$ по отношению к норме $\|\cdot\|_{C[(t_k, t_{k+1})]}$, где $k = 0, ..., N-1$

$$\Downarrow$$

1. последовательность построенных аппроксимаций сходится к точному решению, и
2. контроль точности этих приближений осуществляется при помощи оценки Островского.

$$\mathbf{q = L_1 \cdot (t_i - t_{i-1}) \leqslant 1, \ \forall\, i = 1, 2, ...N.}$$

Оценки интерполирования и интегрирования

Рассмотрим 1-ый шаг метода:

$$u_1(t) = \int_0^t \varphi(u_0(s), s)ds, \ t \in [t_0, t_1], \quad \text{где} \tag{7}$$

- u_0 — кусочно-линейная аффинная функция на сетке $\{z_i\}_{i=1,\dots,M}$, определенной на $[t_0, t_1]$ на
- u_1 — точная функция.

НО! Оператор $\mathcal{T} : V_h \nrightarrow V_h$ **не переводит кусочно-аффинные функции в кусочно-аффинные!** Поэтому **нельзя использовать теорему Островкого в явном виде.**

Важно учитывать погрешности интерполирования и интегрирования!

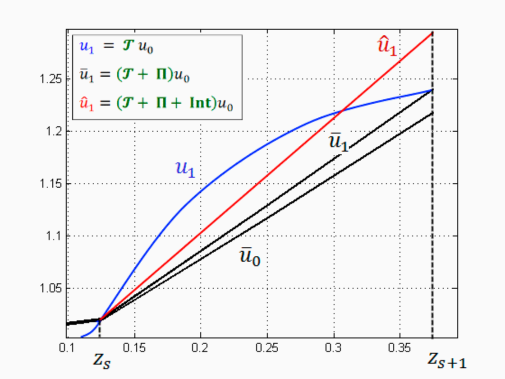


Рис.: Приближенное решение, включающее погрешность интегрирования и интерполирования на сетке $\Omega_{S_k} = \bigcup_{s=0}^{S_k-1} [z_s, z_{s+1}]$, определенной на $[t_0,\ t_1]$.

Гарантированные оценки для метода Пикара-Линделёфа

Результирующая оценка на интервале $[t_0,\ t_1] := \bigcup\limits_{s=0}^{S_k-1} [z_s,\ z_{s+1}]$:

$$\|u_1(t) - u(t)\|_{C([0,\tau])} \leqslant \frac{q}{1-q}\Bigg(\|\widehat{u}_1(t) - u_0(t)\|_{C([t_0,\ t_1])} + \\ + \sum_{s=0,\dots,S_k-1}\left(\frac{\varphi_{s+1}-\varphi_s}{8}\Delta_s + \frac{2}{3}\Delta_s\left[\mathrm{L}_{1,\ s}|u_{0,\ s+1} - u_{0,\ s}| + \mathrm{L}_{2,\ s}\Delta_s\ \right]\right) + \\ + \sum_{s=0,\dots,S_k-1}\left(\frac{\mathrm{L}_s}{2}\Delta_s^2 - \frac{1}{2\mathrm{L}_s}[\varphi_{s+1}-\varphi_s]^2\right)\Bigg),\ \mathrm{L}_s = \mathrm{L}_{1,\ s}\, l_s + \mathrm{L}_{2,\ s} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \text{1-ое слагаемое — составляющая из теоремы Островского,} \\ \text{2-ое слагаемое — оценка ошибки интерполирования } \|\bar{u}_1(t) - u_1(t)\|_{C([t_0,\ t_1])} \\ \text{3-ое слагаемое —оценка ошибки интегрирования } \|\widehat{u}_1(t) - \bar{u}_1(t)\|_{C([t_0,\ t_1])}. \end{cases}$$

Основные свойства представленного алгоритма:

- **Надежность** (погрешность приближенного решения контролируется)
- **Адаптивность** (есть возможность выбрать оптимальный шаг)

Утверждение

Для некоторого конечного временного интервала $[t_0, \ t_K]$ и для любой априори заданной точности ε приближенное решение задачи задачи Коши (3) с Липшецевой функцией φ может может быть найдено при помощи Адаптивного метода Пикара–Линделёфа описанного выше.

$$\frac{du}{dt} = 4u\,t\,\sin(8t), \quad u(0) = u_0 = 1, \quad t \in [0, 3/2] \text{ с решением:}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}^{\frac{1}{16}\sin(8\mathbf{t}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}\cos(8\mathbf{t})}.$$

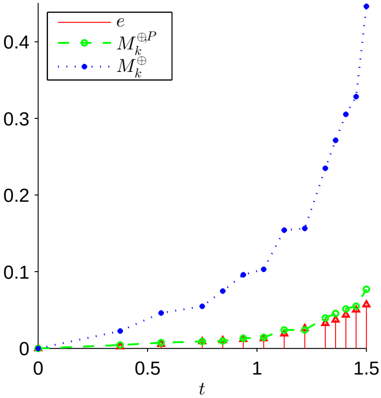


Рис.: Погрешность решения и гарантированные оценки этой погрешности.

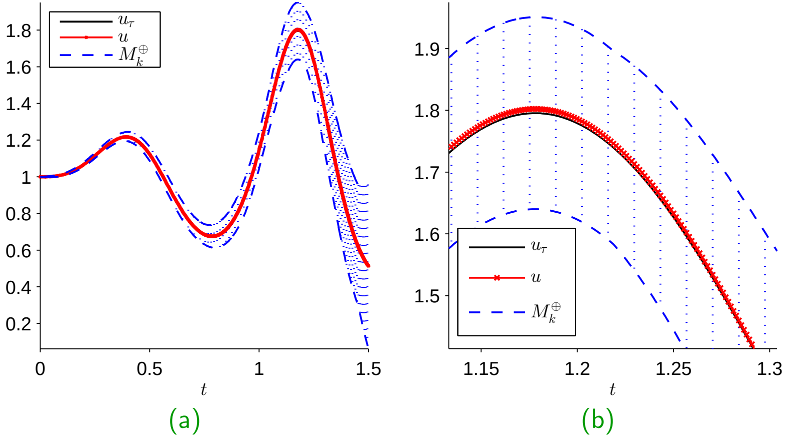
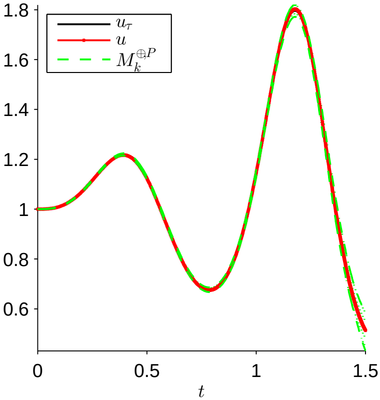
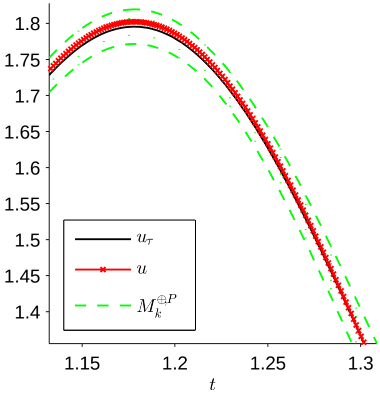


Рис.: (a) Точное и приближенное решения задачи с гарантированной оценкой погрешности по Островскому. (b) Детализация поведениея на конкретном интервале.



(a)

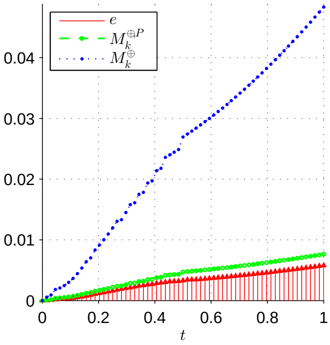


(b)

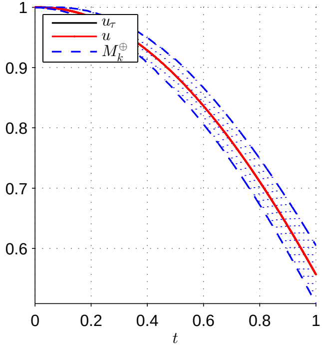
Рис.: (a) Точное и приближенное решения задачи с оптимизированной гарантированной оценкой. (b) Детализация поведениея на конкретном интервале.

$$\frac{du}{dt} = 50\cos(t) - 50u, \quad u(0) = u_0 = 1, \quad t = [0, 1], \text{ с решением:}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2501}}\mathbf{e}^{-\mathbf{50t}} + \frac{\mathbf{2500}}{\mathbf{2501}}\cos(\mathbf{t}) + \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{2501}}\sin(\mathbf{t}).$$



(a)



(b)

Рис.: (a) Погрешность решения и ее мажоранты. (b) Точное и приближенное решения с гарантированной оценкой погрешности.

$$\frac{du_1}{dt} = 998u_1 + 1998u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -999u_1 - 1999u_2$$

$u_1(t_0) = 1,\ u_2(t_0) = 1,\ t \in [0,\ 5 \cdot 10^{-3}]$

с решением $u_1 = 4e^{-t} - 3e^{-1000t}$ и $u_2 = -2e^{-t} + 3e^{-1000t}$.

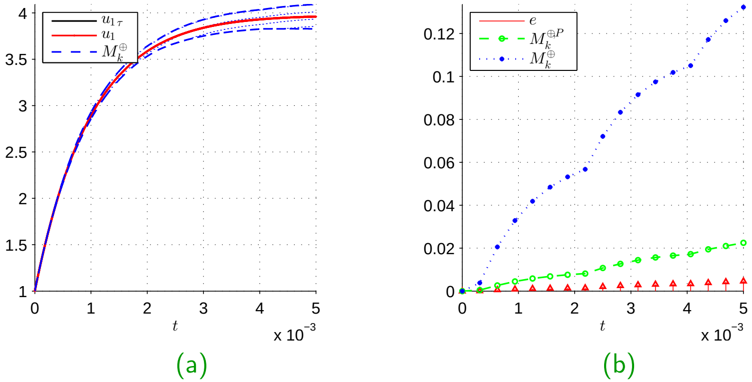


Рис.: (a) Точное и приближенное решение u_1 системы. (b) Погрешность решения u_1 и ее мажоранты.

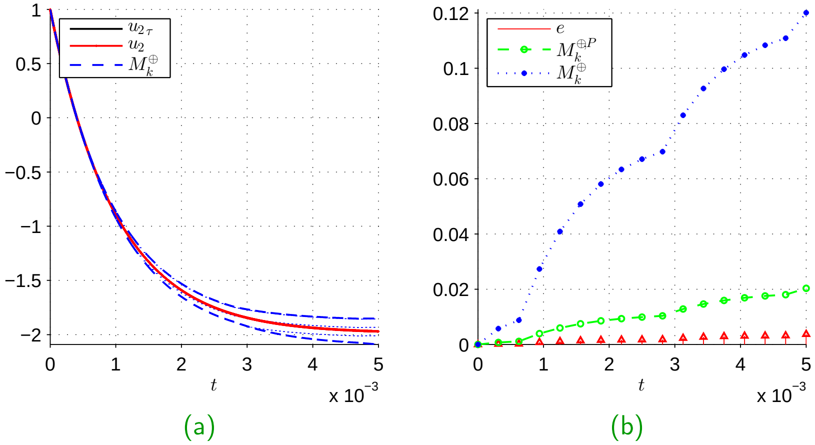


Рис.: (a) Точное и приближенное решение u_2 системы. (b) Погрешность решения u_2 и ее мажоранты.

Выводы

1. Были исследованы методы гарантированного контроля точности, вытекающие из теоремы Островского, для задач

   (a) линейной алгебры;
   (b) итерационного метода Пикара-Линделёфа;

2. Для метода Пикара-Линделёфа были получены оценки погрешности приближенного решения, позволяющие гарантировать, что решение дифференциального уравнения находится в пределах зоны ограниченной оценкой Островского.

Дальнейшее направление исследования

1. Распространить итерационный подход решения задач на более сложных моделях.
2. От линейных параболических задач перейти к нелинейным.
3. Скобинировать этих два подхода на эволюционных задачах с нелинейностью.

Спасибо за внимание.