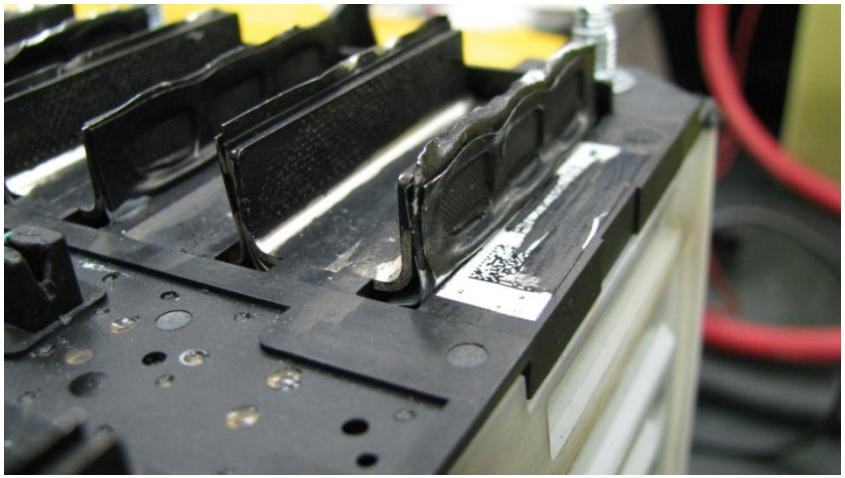
Численное моделирование и анализ задач теплопроводности применительно к тепловому неразрушающему тестированию

Полина Шпартько, гр. 6057/11

Руководитель: Сергей Валерьевич Лупуляк

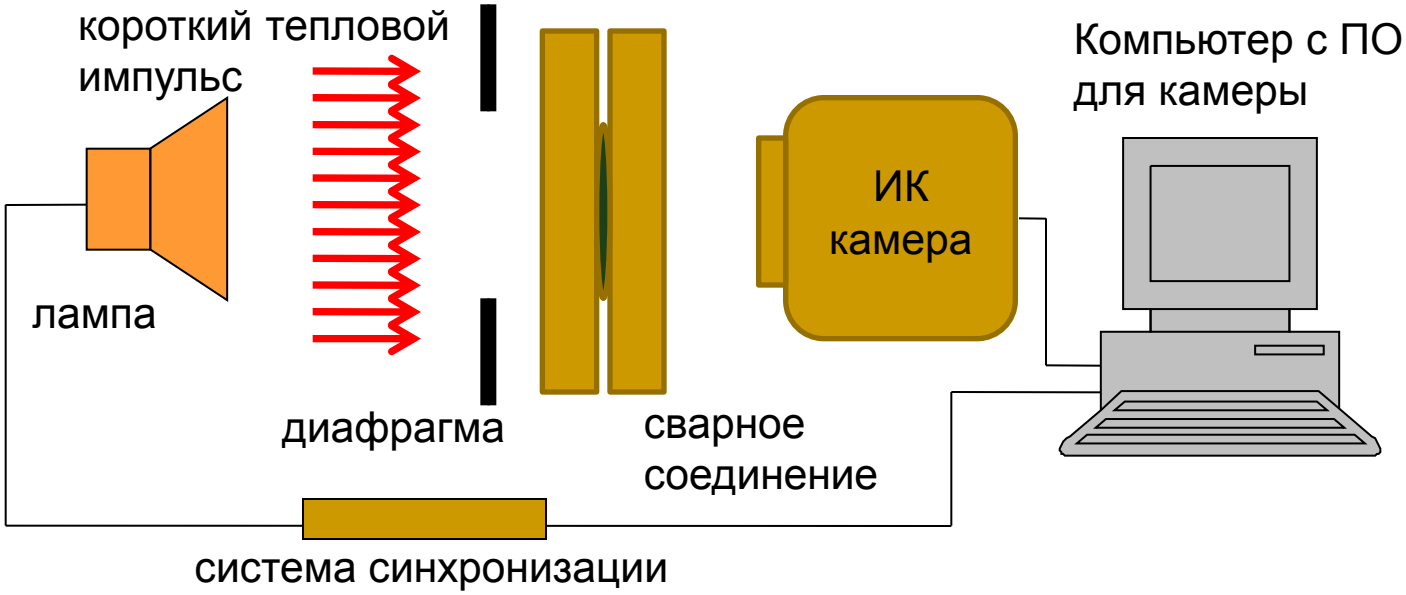
Неразрушающее Тестирование (НТ) соединений

- При сборке аккумуляторов электромобиля Chevrolet Volt используется точечная ультразвуковая сварка
- Важно качество соединений, а именно:
  - Низкое сопротивление
  - Высокая прочность
- Тестирование должно быть быстрым и неразрушающим

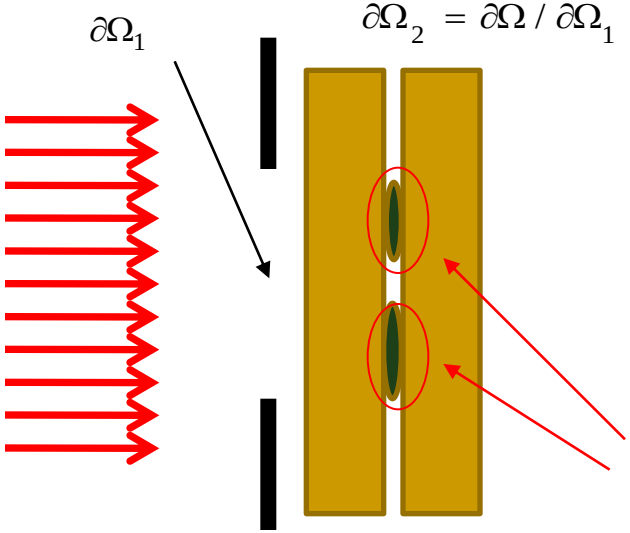


Цель работы

- Адаптация метода импульсного теплового тестирования для контроля точечной сварки
  - Анализ термографических данных эксперимента по импульсному тепловому неразрушающему тестированию
  - Разработка метода оценки площади сварки на основе термографических данных
- Определение формы теплового импульса



Модель прохождения тепла через сварное соединение



области, где сварка произошла

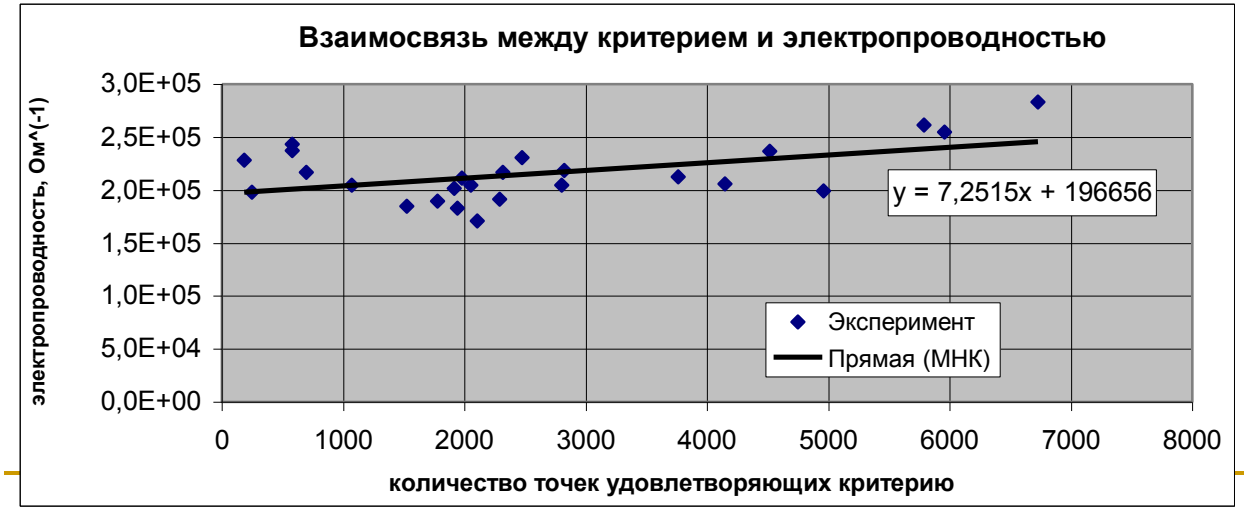
$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(a \nabla T(x,t)\right), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_m) \\ T(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega} \\ \left.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = \begin{cases} q/k, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t_0 \le t \end{cases} \\ \left.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad t \in [0, t_m] \end{cases} \qquad \left(a = k/\rho c\right)$$

a	–	*температуропроводность*
k	–	*теплопроводность*
c	–	*теплоёмкость*
ρ	–	*плотность*

- Задача решена численно при различных конфигурациях области сварки
- Моделирование показывает, что температура над областями сварки поднимается выше и быстрее
- Разработан метод оценки площади сварки основывающаяся на зависимости температуры от времени в каждой точке поверхности

Проверка метода. Результаты

- Подготовлены образцы точечной ультразвуковой сварки
- Электрические сопротивления образцов измерены при помощи специальной установки
- Обработаны термографические данные, полученные в эксперименте импульсного теплового тестирования



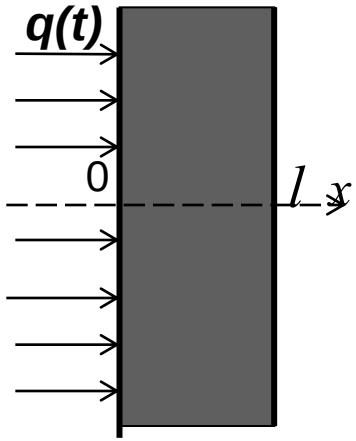
$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{N}}$$

$$s = 2.2 \cdot 10^4 \, Ом^{-1}$$

отклонение: *10%*

Определение теплового потока по температурным данным

- Вторая задача: определение плотности теплового потока поглощаемого поверхностью образца
- Был проведён ряд экспериментов, в которых на место образца устанавливалась тонкая медная пластинка
- Необходимо решить Обратную Задачу Теплопроводности (ОЗТ)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,t_m) \\ T(x,0) = 0, \quad x \in [0,l] \\ T(l,t) = T_l(t), \quad t \in [0,t_m] \\ k\dfrac{\partial T(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0,t_m] \end{cases} \qquad (1)$$

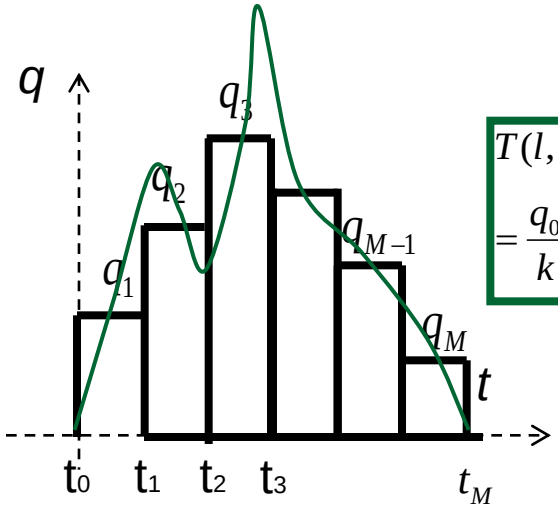
$$\boxed{q(t) \overset{?}{=} k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}}$$

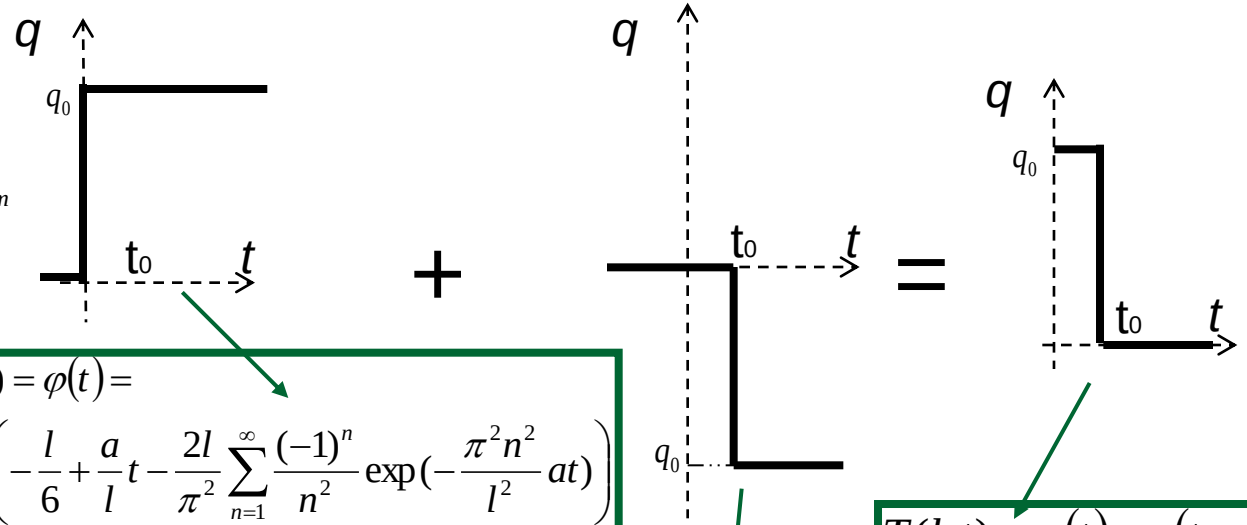
- Известно, что ОЗТ имеет единственное решение, но является неустойчивой относительно исходных данных

Связь температуры и теплового потока

Аппроксимация теплового потока

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{M-1} < t_M = t_m$$





$$T(l,t) = \varphi(t) = \\ = \frac{q_0}{k}\left(-\frac{l}{6} + \frac{a}{l}t - \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}at\right)\right)$$

$$T(l,t) = -\varphi(t - t_0)$$

$$T(l,t) = \varphi(t) - \varphi(t - t_0)$$

Пусть $t_i = i\Delta t, \quad i = \overline{1, M}$

$$\Delta\varphi(t_{i-k}) = \Delta\varphi_{i-k} = \varphi(t_i - t_{k-1}) - \varphi(t_i - t_k) = \varphi(t_{i-k+1}) - \varphi(t_{i-k}) \quad (2)$$

$$\overline{T_l}(t_i) = T_0 + q_1(\varphi(t_i - t_0) - \varphi(t_i - t_1)) + q_2(\varphi(t_i - t_1) - \varphi(t_i - t_2)) + \ldots$$

$$\ldots + q_i(\varphi(t_i - t_{i-1}) - \varphi(t_i - t_i)) = T_0 + \sum_{k=1}^{i} q_k \Delta\varphi_{i-k}$$

$$\boxed{\overline{T_l}(t_i) = T_i = T_0 + \sum_{k=1}^{i} q_k \Delta\varphi_{i-k}} \quad (3)$$

$$\downarrow M \longrightarrow \infty$$

Теорема Дюамеля:

$$\boxed{T_l(t) = \int_0^t q(s)\frac{\partial\varphi(t-s)}{\partial t}ds + T_0} \quad (4)$$

Матричная форма

$$\overline{T_l}(t_i) = T_i = T_0 + \sum_{k=1}^{i} q_k \Delta\varphi_{i-k} \quad (3) \qquad i = \overline{1, M}$$

$$X = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_0 & & & & & & & \\ \Delta\varphi_1 & \Delta\varphi_0 & & & & & & \\ \Delta\varphi_2 & \Delta\varphi_1 & \Delta\varphi_0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ \Delta\varphi_{i-1} & \Delta\varphi_{i-2} & \Delta\varphi_{i-3} & \cdots & \Delta\varphi_0 & & & \\ \Delta\varphi_i & \Delta\varphi_{i-1} & \Delta\varphi_{i-2} & \cdots & \Delta\varphi_1 & \Delta\varphi_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \Delta\varphi_M & \Delta\varphi_{M-1} & \Delta\varphi_{M-2} & \cdots & \Delta\varphi_{M-i+1} & \Delta\varphi_{M-i} & \cdots & \Delta\varphi_0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{i-1} \\ T_i \\ \vdots \\ T_M \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{i-1} \\ q_i \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T = T_0 1 + Xq} \quad (5) \longrightarrow \quad \boxed{\overline{q} = X^{-1}(Y - T_0 1)} \quad (6)$$

$Y - измерения$

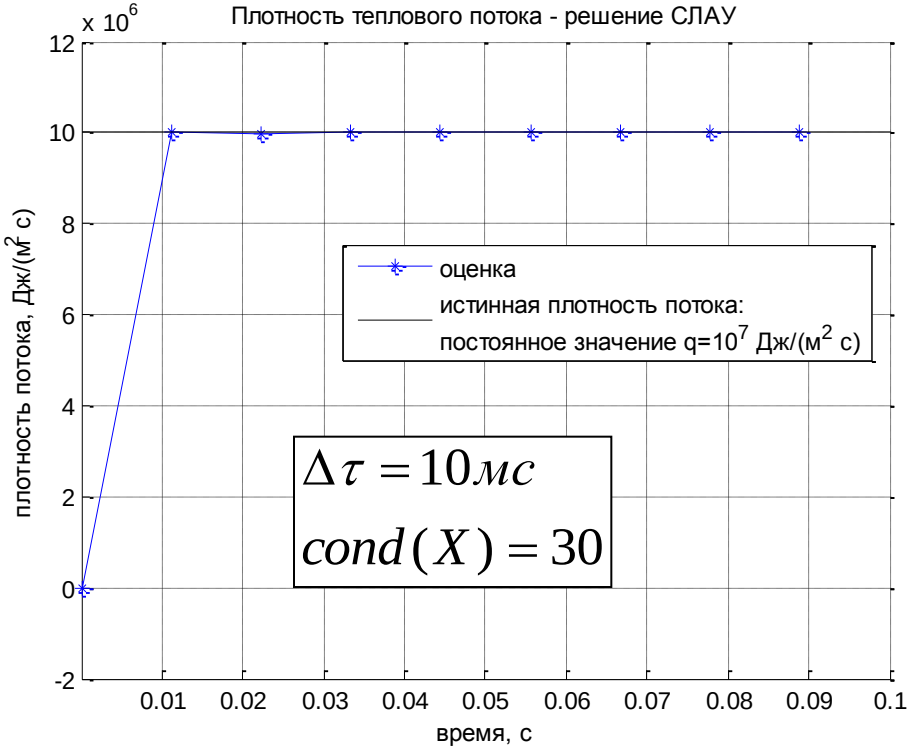
Метод Штольца

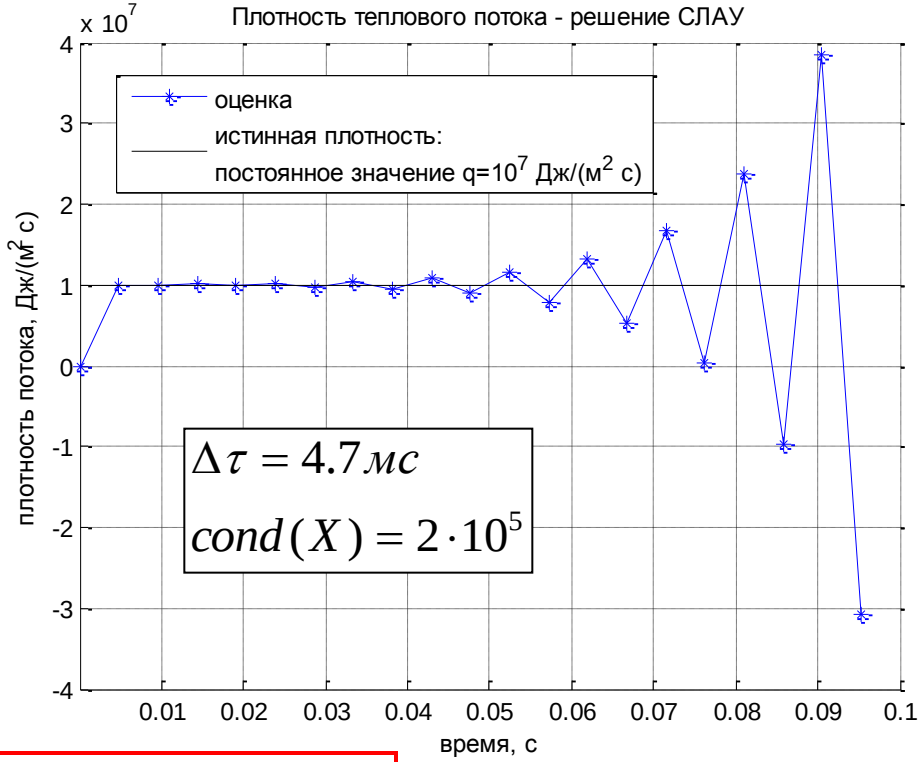
Анализ устойчивости метода Штольца

$$\bar{q} = X^{-1}\left(Y - T_0 1\right) \quad (6)$$

$$l = 1.6 мм$$
$$a = 1.2 \cdot 10^{-4}\ м^2/с$$
$$k = 390\ Дж/(м \cdot К \cdot с)$$

$$q_{\max} \sim 10^6 - 10^8\ Дж/\left(м^2 \cdot с\right)$$
$$t_0 \sim 1 - 20 мс$$



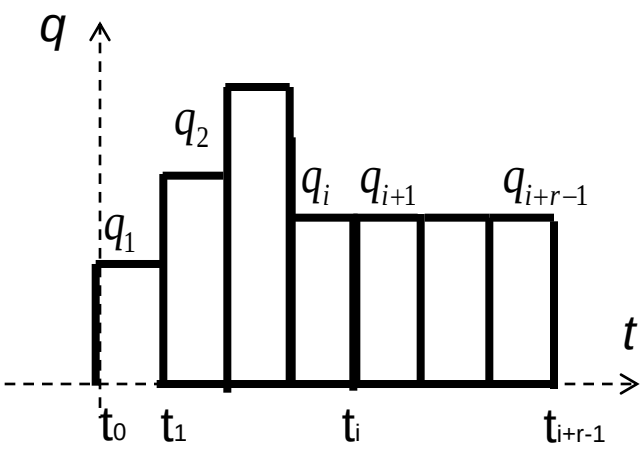


Метод является условно устойчивым: $\Delta\tau > \Delta\tau_{кр}$

Метод последовательной функциональной аппроксимации

Пусть известны: $\overline{q_k}, \quad k = \overline{1, i-1}$

Предположим: $q_{i+1} = q_{i+2} = \ldots = q_{i+r-1} = q_i$



$$\begin{cases} T_i = T\big|_{q_i=0} + q_i\varphi_1 \\ T_{i+1} = T_{i+1}\big|_{q_{i+1}=q_i=0} + q_{i+1}\varphi_2 \\ \ldots \\ T_{i+r-1} = T_{i+r-1}\big|_{q_{i+r-1}=\ldots=q_{i+1}=q_i=0} + q_{i+r-1}\varphi_r \end{cases} \qquad \left(\varphi_j = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta\varphi_k\right)$$

$$S = \sum_{j=1}^{r} \left(y_{i+j-1} - T_{i+j-1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left(y_{i+j-1} - T_{i+j-1}\big|_{q_{i+j-1}=\ldots=q_{i+1}=q_i=0} - q_i\varphi_j\right)^2 \longrightarrow \min$$

$$\boxed{\overline{q_i} = \frac{\sum_{j=1}^{r}\left(y_{i+j-1} - \overline{T_{i+j-1}}\big|_{q_{i+j-1}=\ldots=q_{i+1}=q_i=0}\right)\varphi_j}{\sum_{j=1}^{r}\varphi_j^2}} \quad (7)$$

Метод регуляризации

$$S=\sum_{i=1}^{M}\left(y_i-\overline{T_i}\right)^2+\alpha_0\sum_{i=1}^{M}q_i^{\,2}+\alpha_1\sum_{i=1}^{M-1}\left(q_{i+1}-q_i\right)^2+\alpha_2\sum_{i=1}^{M-2}\left(q_{i+2}-2q_{i+1}+q_i\right)^2 \quad (8)$$

$\alpha_0\neq 0,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=0$ – *регуляризация нулевого порядка*

$\alpha_0=0,\quad \alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2=0$ – *регуляризация Iго порядка*

$\alpha_0=0,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2\neq 0$ – *регуляризация IIго порядка*

$$H_0=I$$

$$H_1=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

измерения

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_M\end{bmatrix}$$

плотности потока

$$q=\begin{bmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_M\end{bmatrix}$$

оценки температуры

$$T=\begin{bmatrix}T_1\\ \vdots\\ T_M\end{bmatrix}$$

$$H_2=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$S=\left(Y-T\right)^T\left(Y-T\right)+\alpha_0 q^T H_0^{\,T} H_0 q+\alpha_1 q^T H_1^{\,T} H_1 q+\alpha_2 q^T H_2^{\,T} H_2 q \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q}=\bar{0}$$

$$\boxed{\bar{q}=\left(X^T X+\alpha_0 H_0^{\,T} H_0+\alpha_1 H_1^{\,T} H_1+\alpha_2 H_2^{\,T} H_2\right)^{-1} X^T\left(Y-T_0 1\right)} \quad (10)$$

Переход к безразмерным величинам

- Для большей общности все алгоритмы и контрольные примеры были реализованы в безразмерной форме

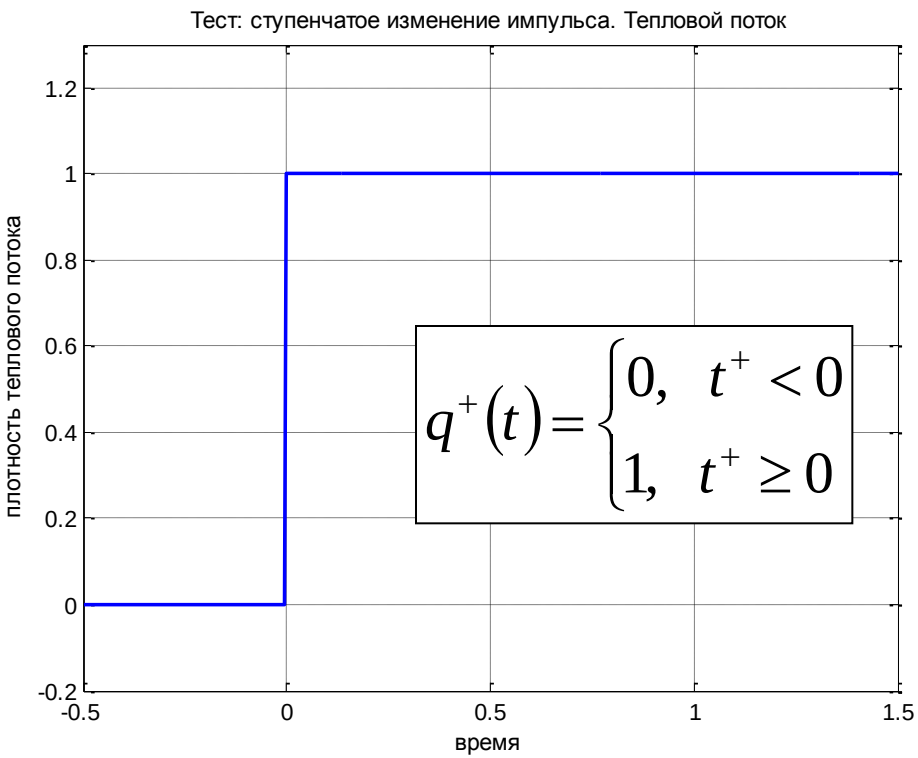
$$x^+ = \frac{x}{l} - \textit{безразмерная координата}$$

$$t^+ = \frac{at}{l^2} - \textit{безразмерное время} \ (\textit{число Фурье})$$

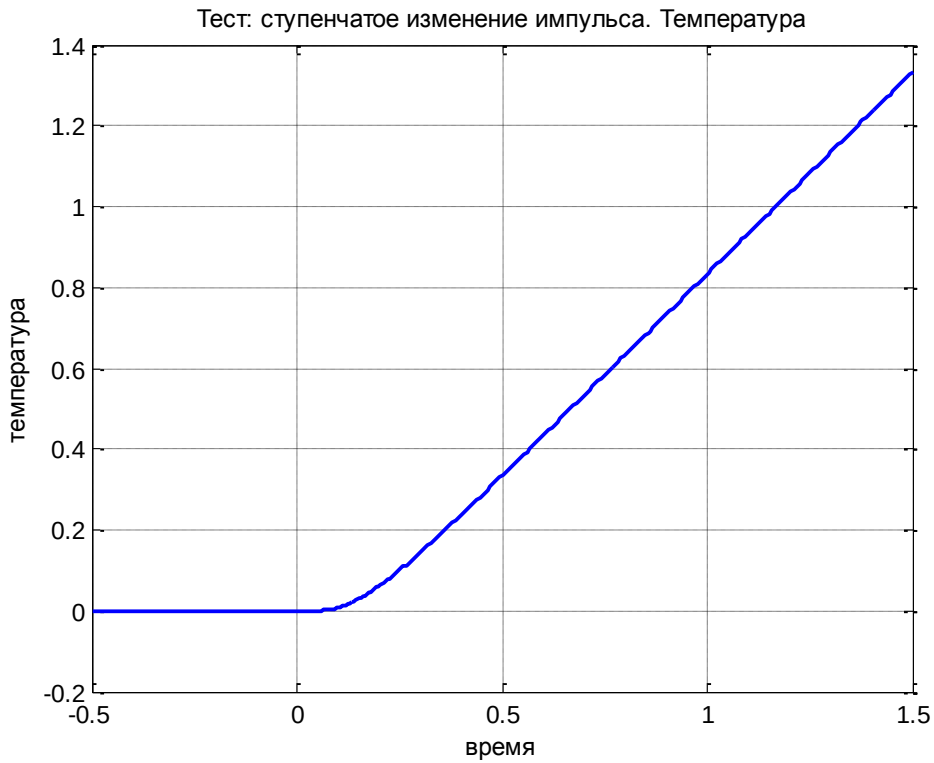
$$q^+ = \frac{q}{q_0} - \textit{безразмерная плотность теплового потока}$$

$$T^+ = \frac{Tk}{q_0 l} - \textit{безразмерная температура}$$

Контрольный пример: ступенчатое изменение плотности

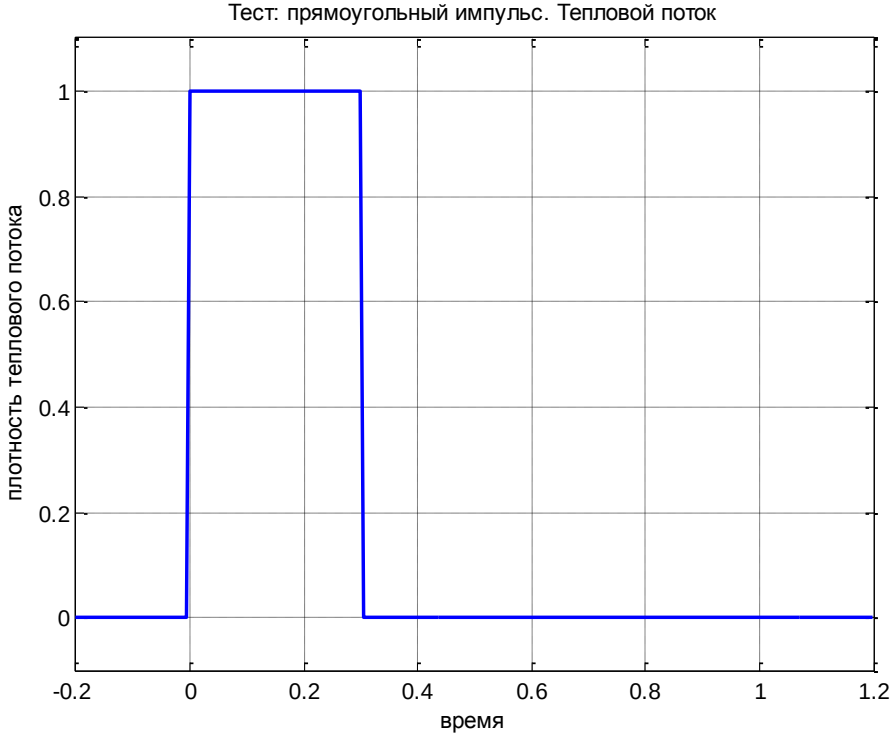


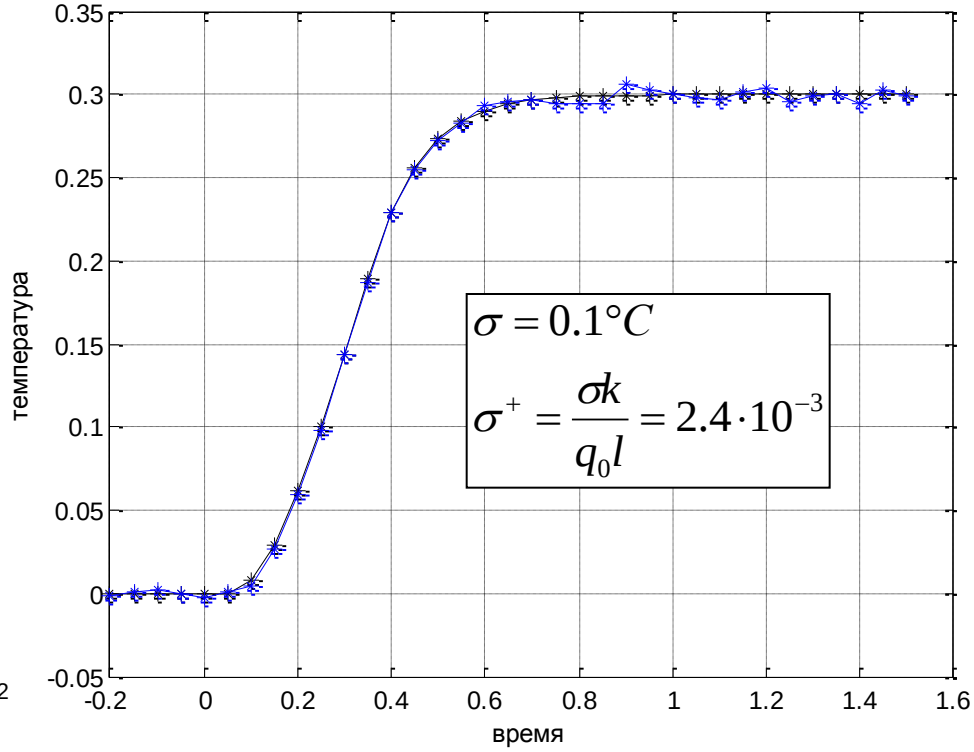
$$q^{+}(t)=\begin{cases}0, & t^{+}<0\\ 1, & t^{+}\geq 0\end{cases}$$



$$T_l^{+}(t^{+})=\varphi^{+}(t^{+})=-\frac{1}{6}+t^{+}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\exp(-\pi^2 n^2 t^{+})$$

Контрольный пример: импульс прямоугольной формы

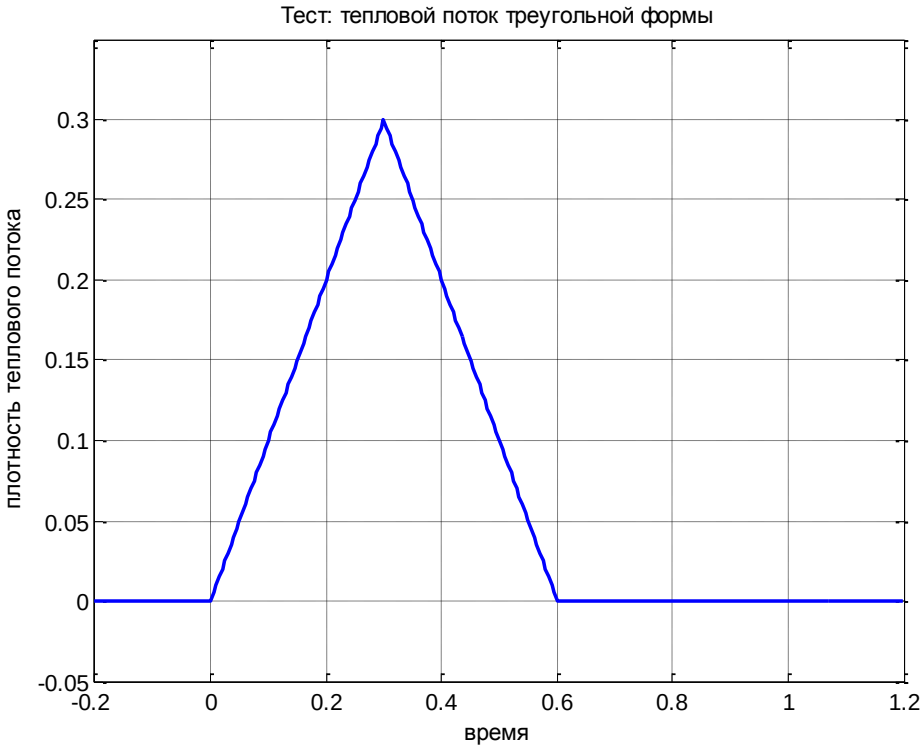


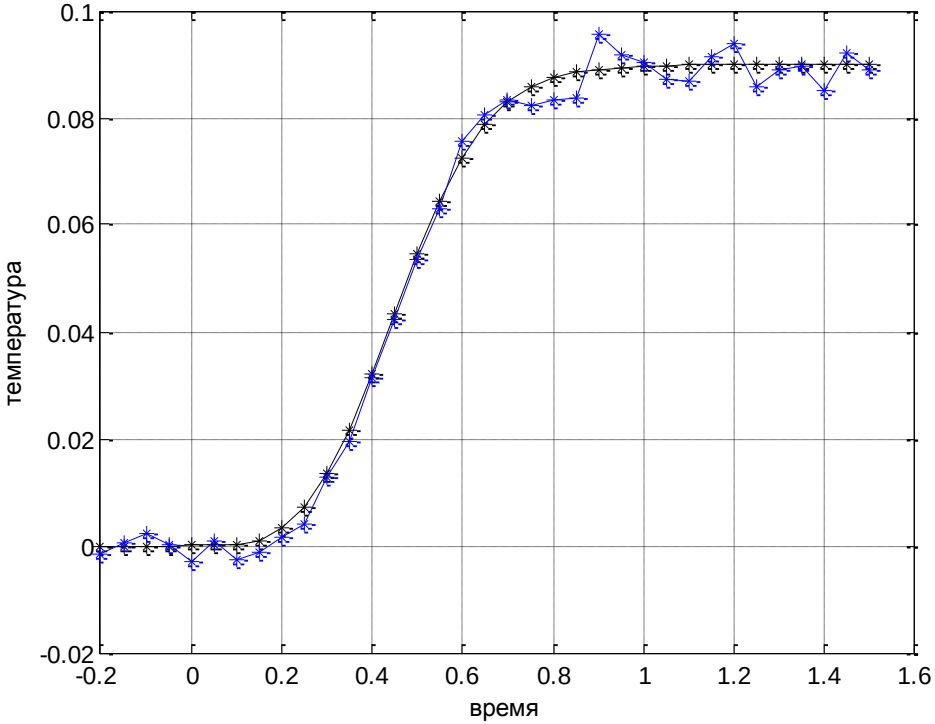


$$q^+(t^+) = \begin{cases} 1, & t^+ \in [0, t_0^+] \\ 0, & t^+ \in (-\infty, 0) \cup (t_0^+, +\infty) \end{cases}$$

$$T_l^+(t^+) = \varphi^+(t^+) - \varphi^+(t^+ - t_0^+)$$

Контрольный пример: тепловой импульс треугольной формы





$$q(t)=\begin{cases}0, & t^+<0\\ q_0t^+, & 0\le t^+\le t_0{}^+\\ -q_0t^++2q_0t^+, & t_0{}^+\le t^+\le 2t_0{}^+\\ 0, & t^+>2t_0{}^+\end{cases}$$

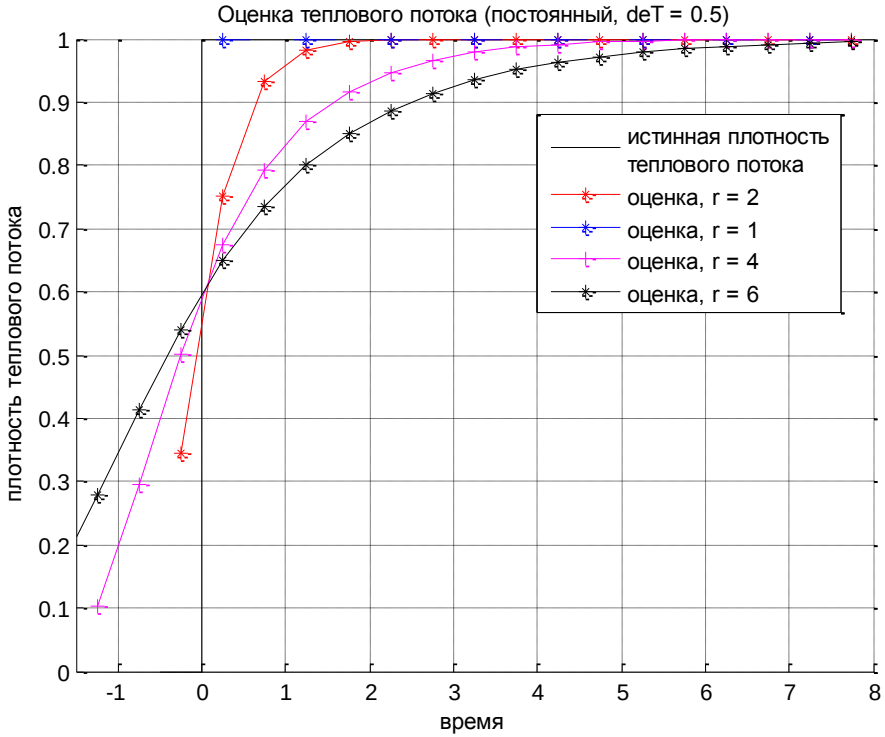
$$\phi^+=\frac{\left(t^+\right)^2}{2}-\frac{t^+}{6}+\frac{7}{360}+\frac{2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\exp\left(-\pi^2n^2t^+\right)$$

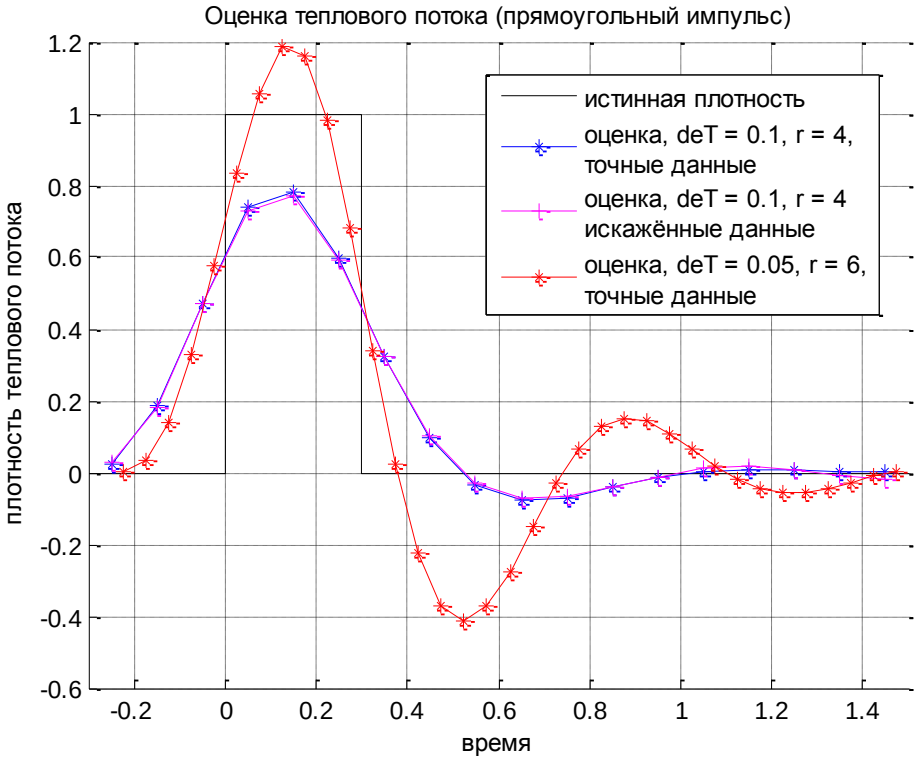
$$T_l\left(t^+\right)=\phi^+(t^+),\qquad 0\le t^+<t_0{}^+$$

$$T_l\left(t^+\right)=\phi^+(t^+)-2\phi^+(t^+-t_0{}^+),\qquad t_0{}^+\le t^+<2t_0{}^+$$

$$T_l\left(t^+\right)=\phi^+(t^+)-2\phi^+(t^+-t_0{}^+)+\phi^+(t^+-2t_0{}^+),\qquad t^+\ge 2t_0{}^+$$

Метод функциональной аппроксимации. Результаты

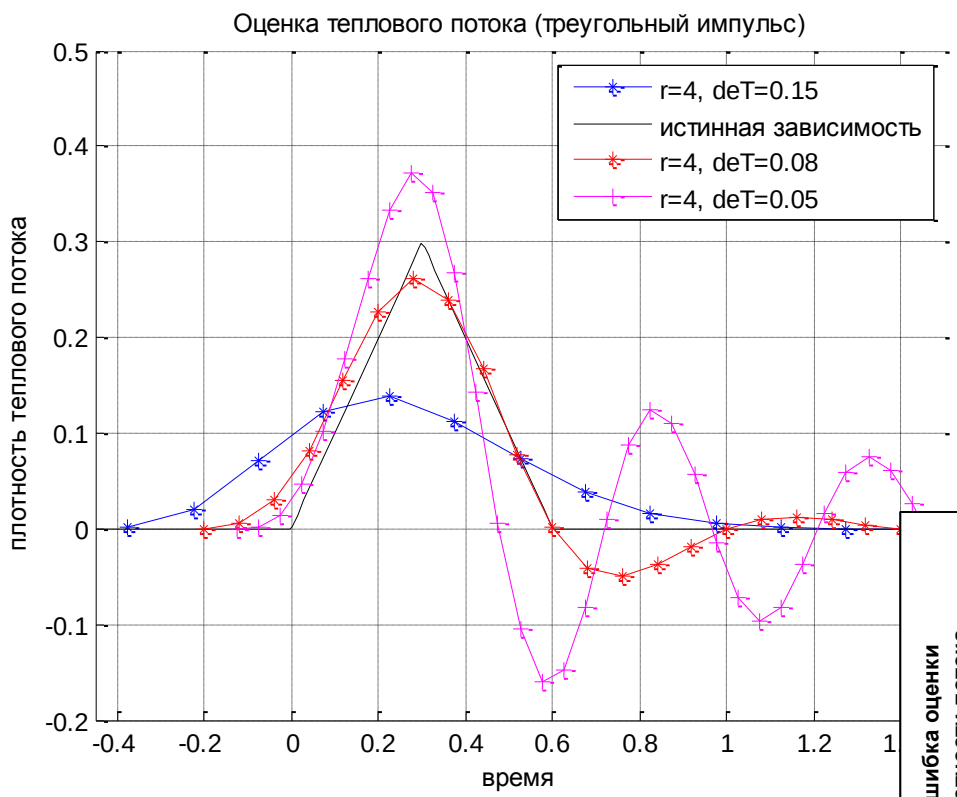




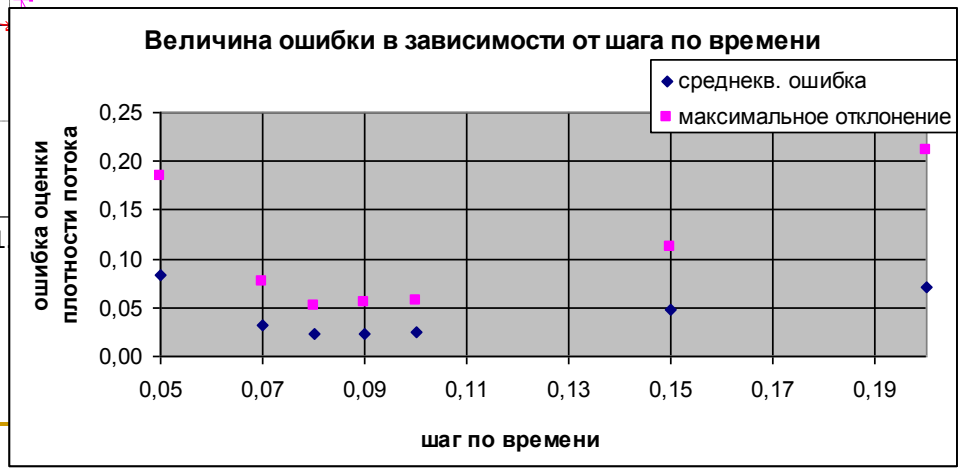
- Чем больше *r*, тем более сглаженной получается оценка
- При *r* > *1* решение устойчиво при шагах меньше критического для метода Штольца

r	$\Delta\tau$	*искажение*	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{q_i}-q_i\right)^2}{M}}$	$\max_{i=1,M}\left\lvert\overline{q_i}-q_i\right\rvert$
4	0,1	нет	0,1931	0,4685
4	0,1	есть	0,1931	0,4685
6	0,05	нет	0,2040	0,5752

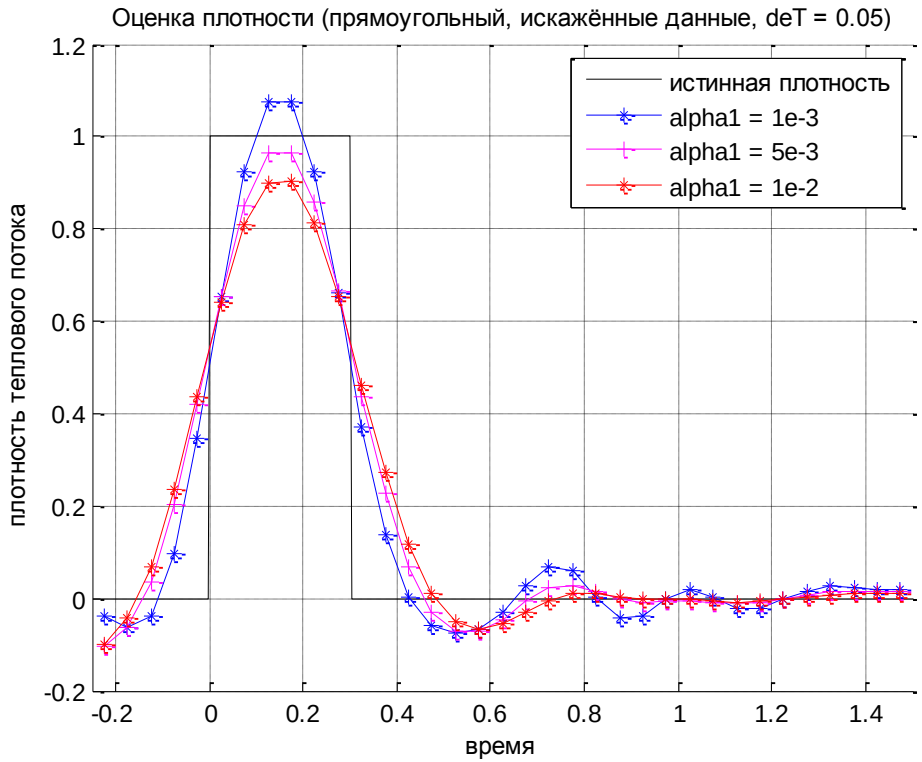
Метод функциональной аппроксимации. Треугольный импульс



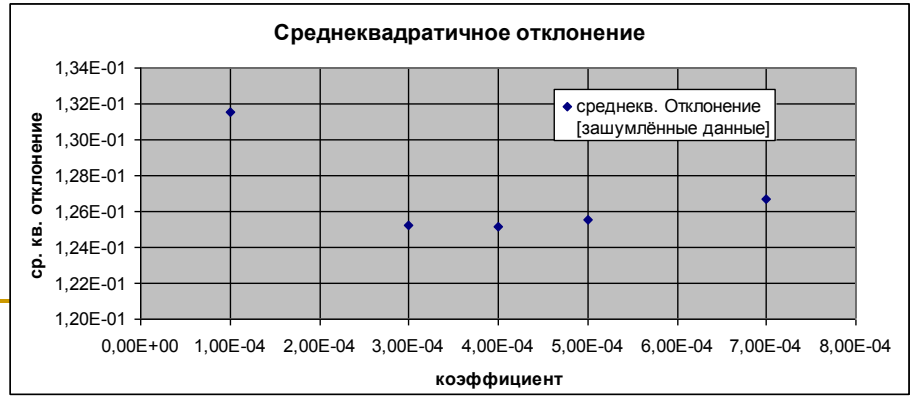
r	$\Delta\tau$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{q_i}-q_i\right)^2}{M}}$	$\max_{i=\overline{1,M}}\left\|\overline{q_i}-q_i\right\|$
4	5,00E-02	8,28E-02	1,85E-01
4	7,00E-02	3,16E-02	7,56E-02
4	8,00E-02	2,26E-02	5,06E-02
4	9,00E-02	2,29E-02	5,50E-02
4	1,00E-01	2,54E-02	5,59E-02
4	1,50E-01	4,77E-02	1,12E-01
4	2,00E-01	7,07E-02	2,10E-01



Метод регуляризации. Прямоугольный тепловой импульс

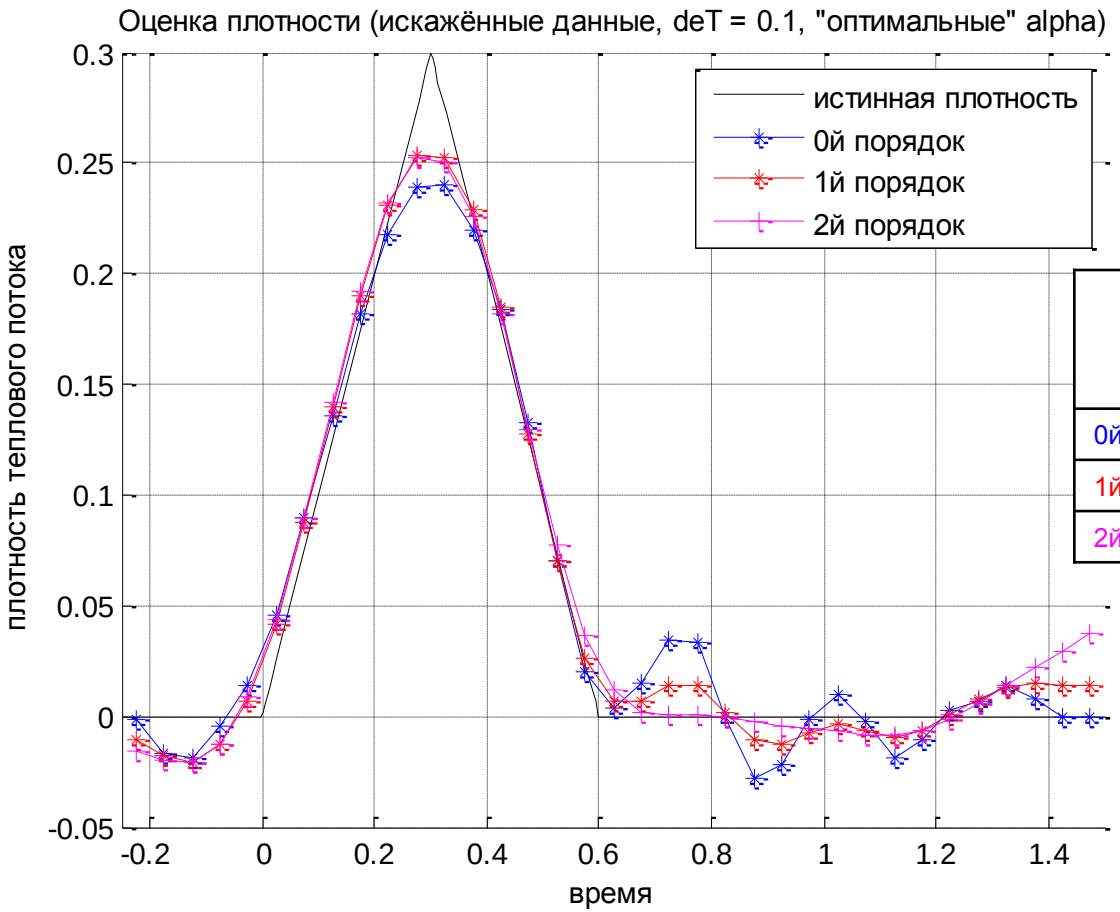


$\Delta\tau^{+}$	α_0	α_1	α_2	*искажение*	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{q_i}-q_i\right)^2}{M}}$
5,00E-02	0	1,00E-04	0	нет	1,07E-01
				есть	1,32E-01
5,00E-02	0	3,00E-04	0	нет	1,16E-01
				есть	1,25E-01
5,00E-02	0	4,00E-04	0	нет	1,18E-01
				есть	1,25E-01
5,00E-02	0	5,00E-04	0	нет	1,20E-01
				есть	1,26E-01
5,00E-02	0	5,00E-04	0	нет	1,23E-01
				есть	1,27E-01



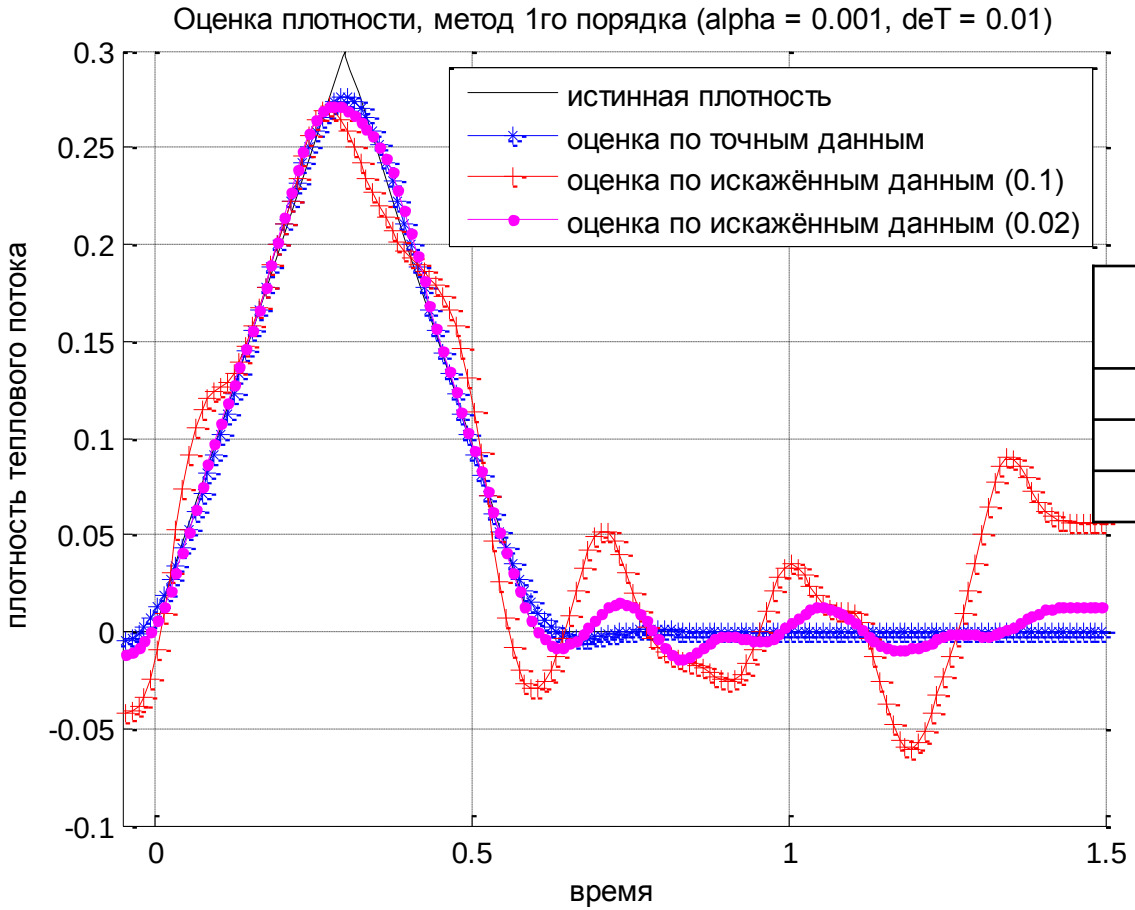
- Результаты лучше, чем те, что даёт метод функциональной аппроксимации

Метод регуляризации. Сравнение методов разных порядков



	«оптимальное» α	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{q_i}-q_i\right)^2}{M}}$
0й порядок	2,00E-03	9,12E-03
1й порядок	5,00E-03	4,94E-03
2й порядок	2,00E-02	7,24E-03

Метод регуляризации. Влияние ошибок

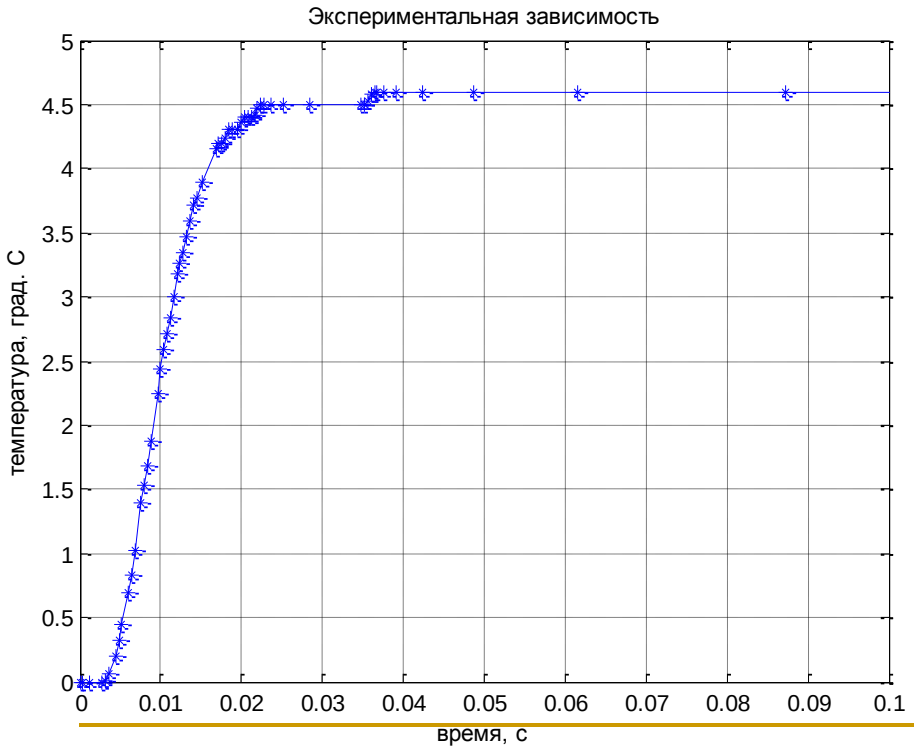


σ^+	σ	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{q_i}-q_i\right)^2}{M}}$	$\max_{i=\overline{1,M}}\left\|\overline{q_i}-q_i\right\|$
0	0	3,83E-03	1,92E-02
4,88E-04	0,02	8,17E-03	2,61E-02
2,44E-03	0,1	3,49E-02	8,95E-02

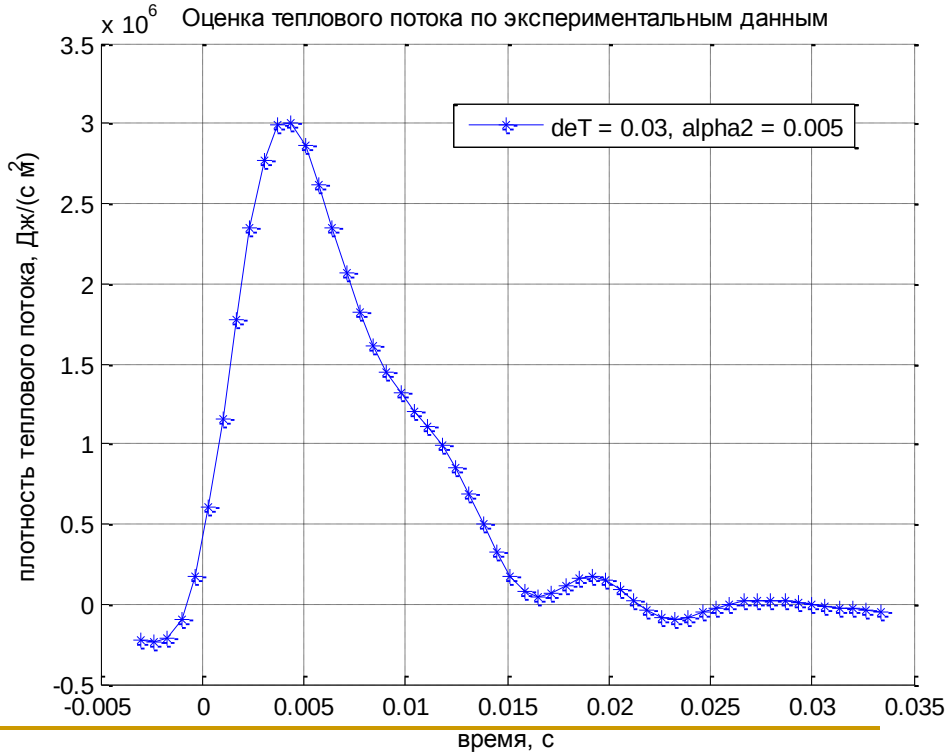
Оценка плотности теплового потока по экспериментальным данным

- К экспериментальным данным был применён метод регуляризации

Исходные данные



Результат



Заключение

- На основе модели прохождения тепла через сварное соединение предложен метод оценки площади сварки
- Исследовано несколько методов решения обратной задачи теплопроводности
- По экспериментальным данным восстановлена плотность теплового потока

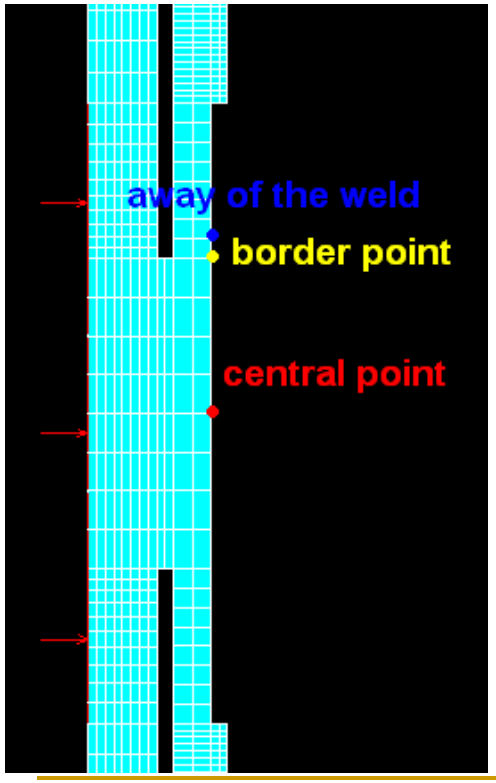
Благодарности

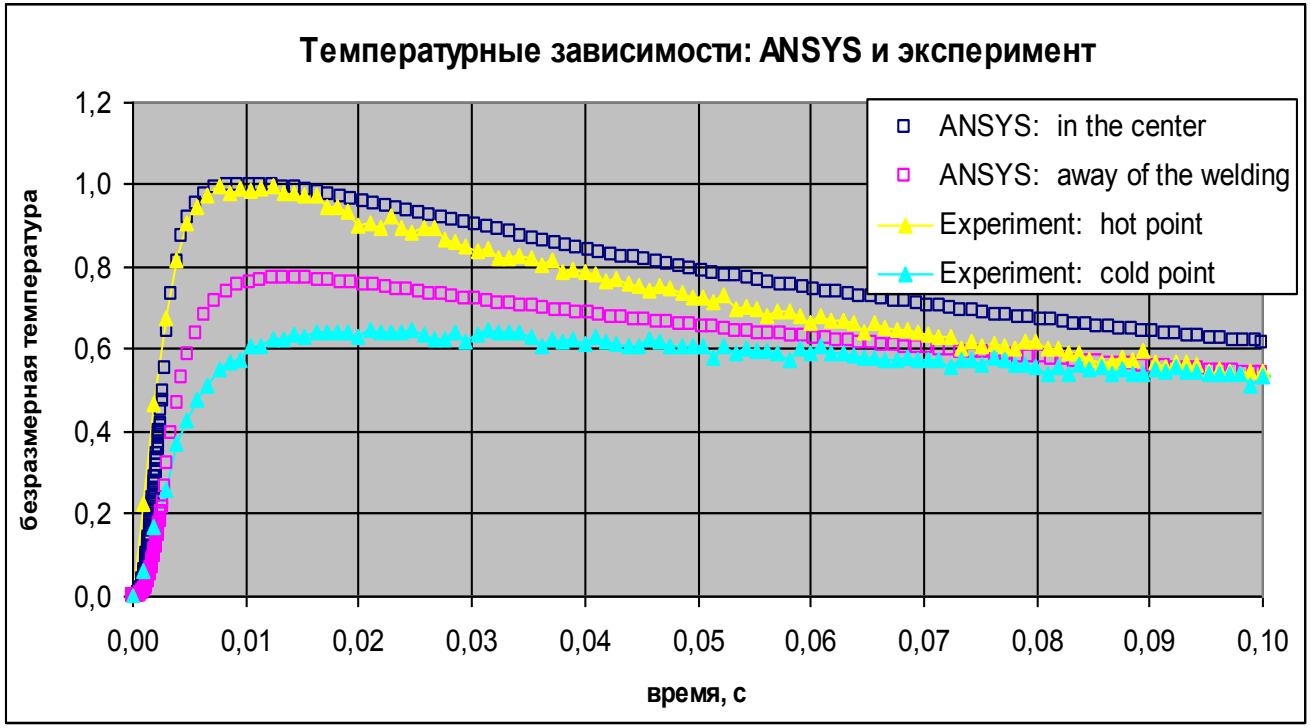
- General Motors R&D and Planning
  - Леонид Лев
  - Джин Со
  - Николай Кондратьев

Оценка площади сварки

$$A = \{(x_i, y_i) | T(t, x_i, y_i) > T_{ANSYS_away_of_welding}(t)\}$$

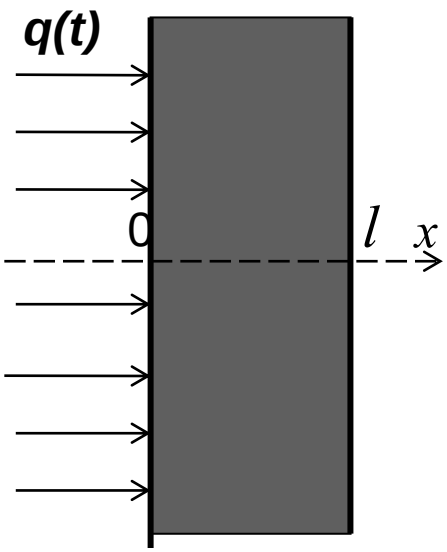
$$Качество \sim |A|$$





Определение теплового потока по температурным данным

- Вторая задача: определение плотности теплового потока поглащаемого поверхностью образца



$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,t_m) \\ T(x,0) = 0, \quad x \in [0,l] \\ T(l,t) = T_l(t), \quad t \in [0,t_m] \\ k\dfrac{\partial T(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0,t_m] \end{cases}$$

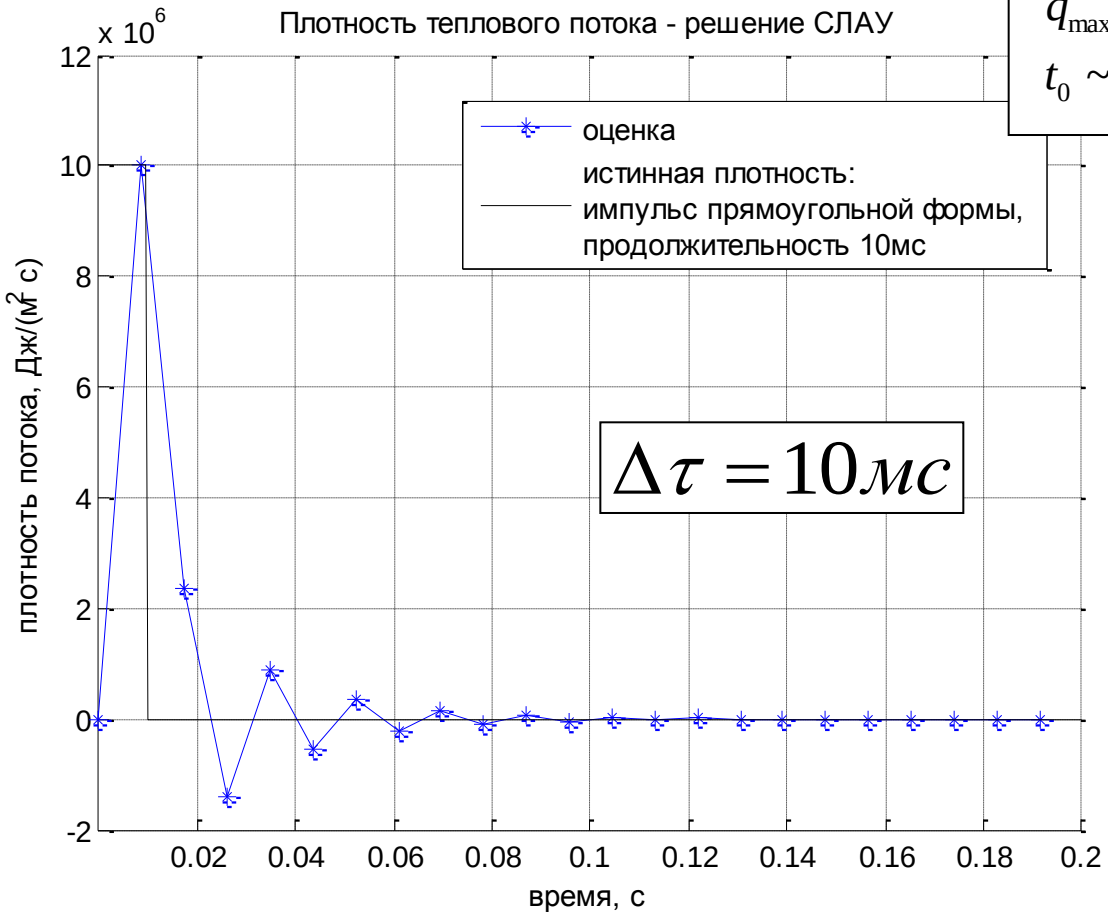
$$\boxed{q(t) \overset{?}{=} k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}}$$

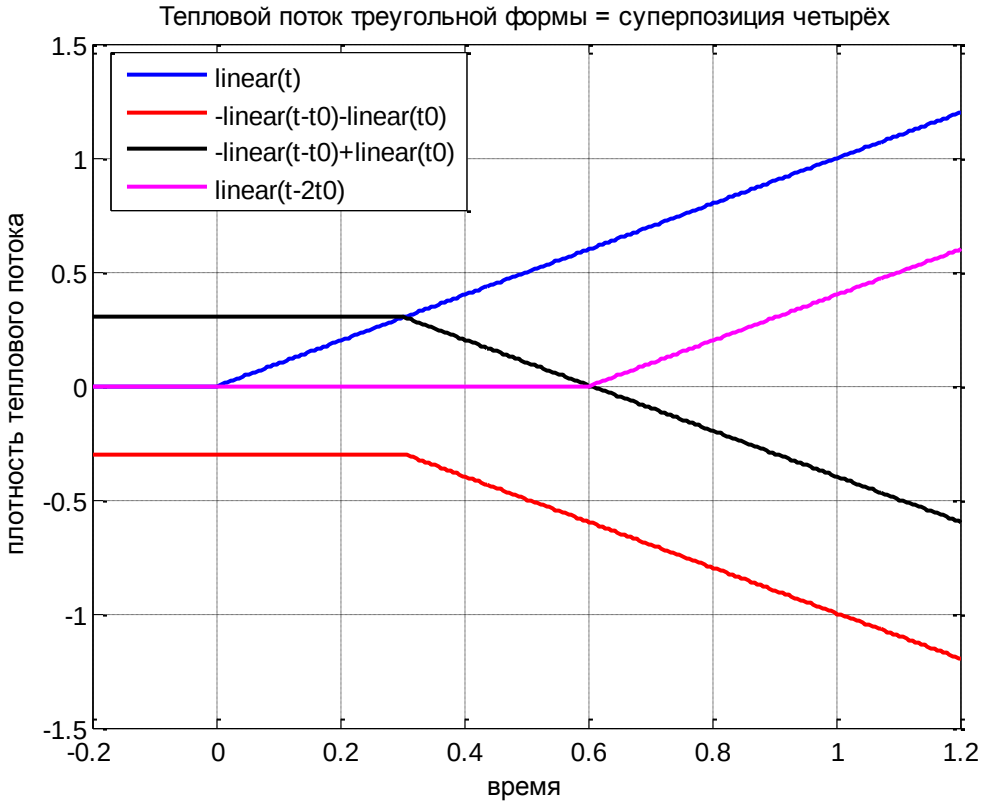
Аналитическое решение:

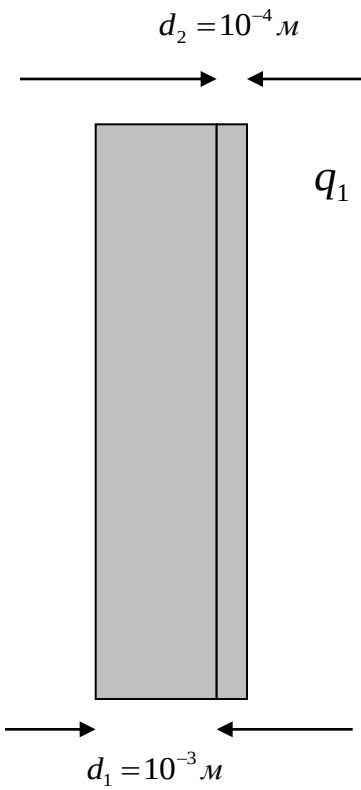
$$\exists \; T_l^{(n)}(t) = \frac{\partial T_l^{\,n}(t)}{\partial t^n}, \quad \forall n \Rightarrow q(t) = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_l^{(n)}(t)\,l^{2n-1}}{a^n(2n-1)!}$$

Применимость к реальной задаче

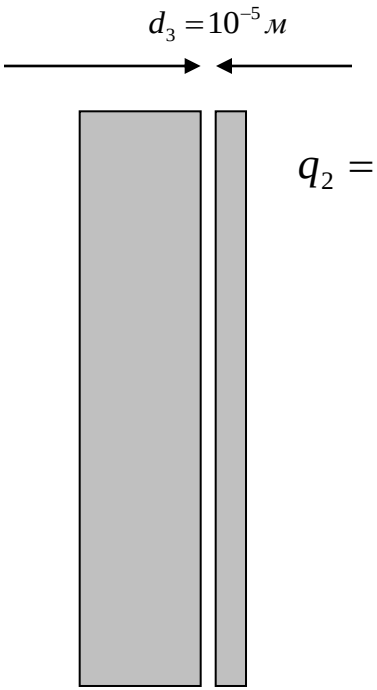
$$q_{\max} \sim 10^6 - 10^8 \; Дж/\left(м^2 \cdot с\right)$$
$$t_0 \sim 1 - 20 мс$$




Тепловой поток треугольной формы = суперпозиция четырёх
linear(t)
-linear(t-t0)-linear(t0)
-linear(t-t0)+linear(t0)
linear(t-2t0)
плотность теплового потока
время
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

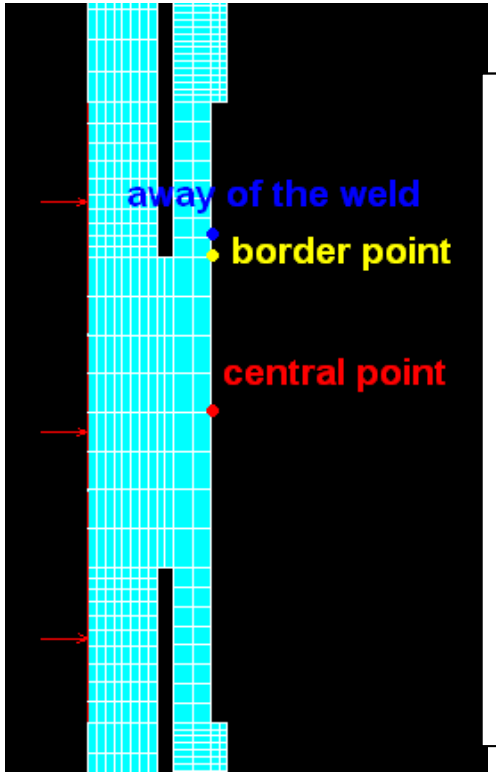


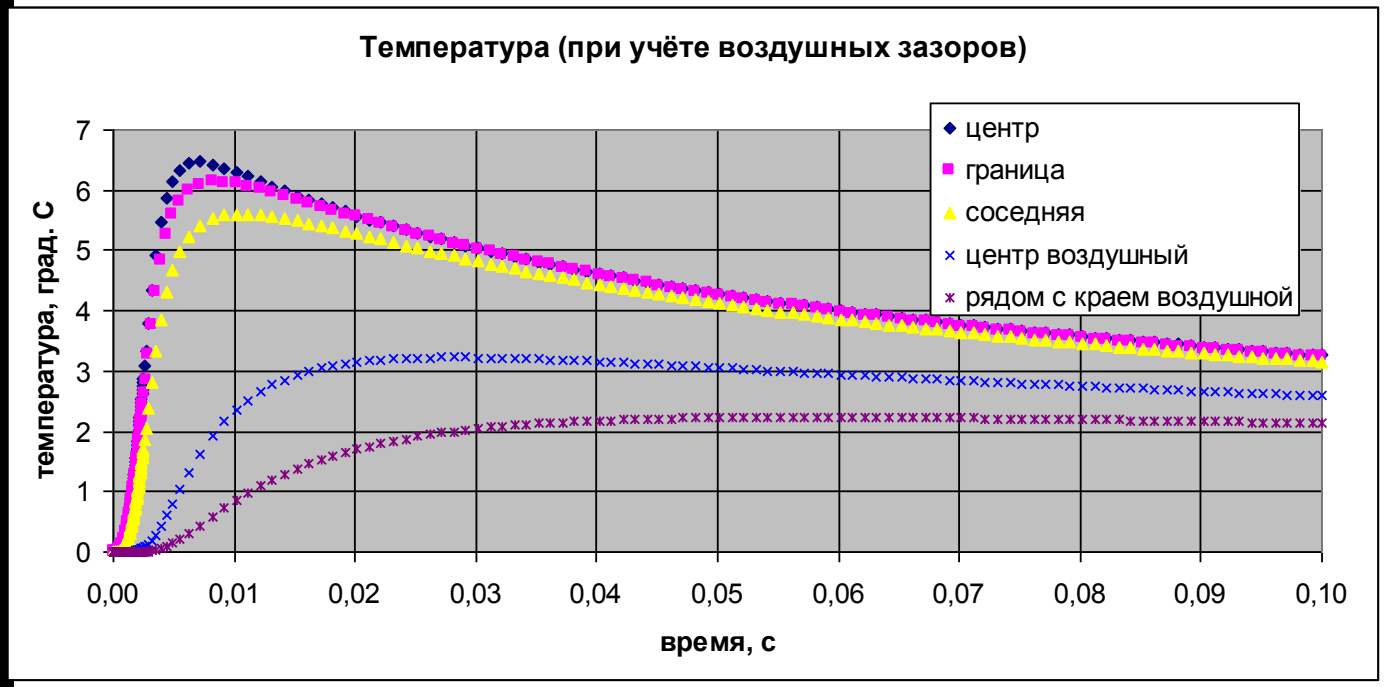
$$q_1 = \frac{\Delta T}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_1}}$$



$$q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_1} + \frac{d_3}{k_2}}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{2.58}{3.54 \cdot 10^2} < 1\%$$


away of the weld
border point
central point


Температура (при учёте воздушных зазоров)
температура, град. С
время, с
0
1
2
3
4
5
6
7
0,00
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,10
центр
граница
соседняя
центр воздушный
рядом с краем воздушной