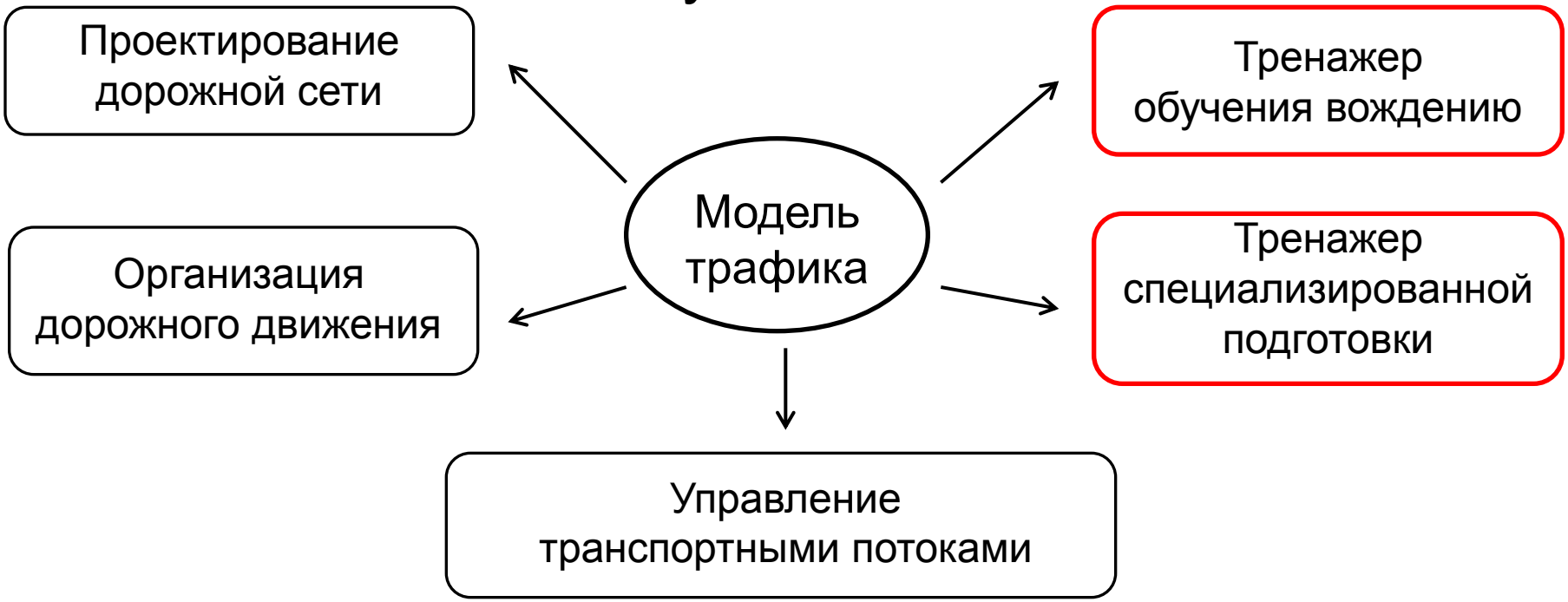
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Физико-механический факультет
Кафедра прикладной математики

Математическое моделирование автомобильного трафика в транспортных тренажерах

Выполнила студентка Курц В.В.

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц. Ануфриев И.Е.

Актуальность



Цели работы

- Исследовать имеющиеся модели автомобильного трафика
- Получить модель автомобильного трафика, которая:
  - позволит учесть индивидуальные особенности водителей, технические характеристики транспортных средств и дорожную обстановку
  - устойчива с математической точки зрения
  - позволит моделировать автомобильный трафик в городских условиях
- Реализовать в виде приложения с визуализацией

Модели динамики транспортных потоков

Микроскопические модели	Макроскопические (гидродинамические) модели
• явно выписывается уравнение движения каждого автомобиля • ускорение автомобиля – функция от скорости этого автомобиля, расстояния до впереди идущего автомобиля (лидера) и скорости относительно лидера	• Транспортный поток – поток «мотивированной» сжимаемой жидкости • Плотность и скорость потока • Уравнение состояния + закон сохранения массы
• Обыкновенные дифференциальные уравнения • Дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени	Дифференциальные уравнения в частных производных
• Модели оптимальной скорости • Клеточные автоматы • Модели следования за лидером ⇩ Модель разумного водителя (Intelligent Driver Model), М. Трайбер, 1999	• Модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса, 1955 • Модель Танака, 1963 • Модель Пейна, 1971 • Модель Уизема, 1974

Описание модели разумного водителя

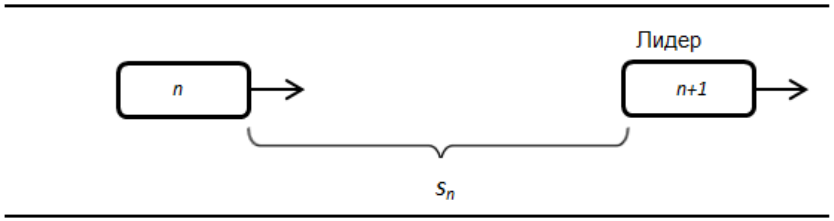
(модель движения по одной полосе)

Ускорение автомобиля: $\dot{v}_n = a_n \left[\underbrace{1 - \left(\frac{v_n}{v_n^0} \right)^{\delta}} - \underbrace{\left(\frac{s_n^*(v_n, \Delta v_n)}{s_n} \right)^2} \right]$ + уравнение для координаты: $\dot{x}_n = v_n$

Динамика на свободной дороге

Взаимодействие с лидером

Желаемая дистанция: $s_n^*(v_n, \Delta v_n) = s_n' + T_n v_n + \frac{v_n \Delta v_n}{2 b_n}$



Параметры модели:

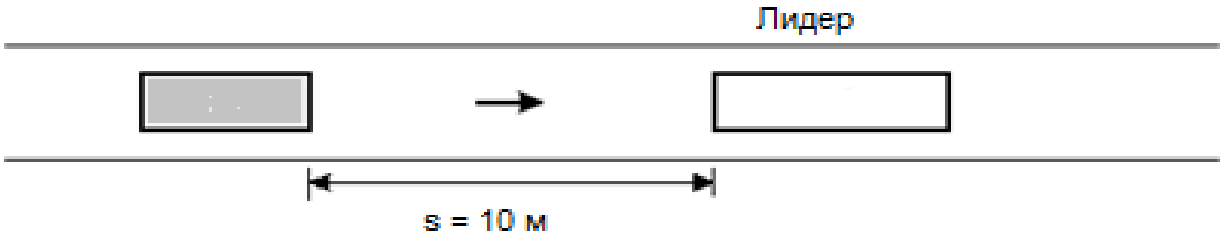
- желаемая скорость v^0
- время реакции T
- максимальное ускорение a
- ускорение торможения b
- показатель «чувствительности» при ускорении δ
- заторная дистанция s'

могут быть выбраны индивидуально для каждого автомобиля

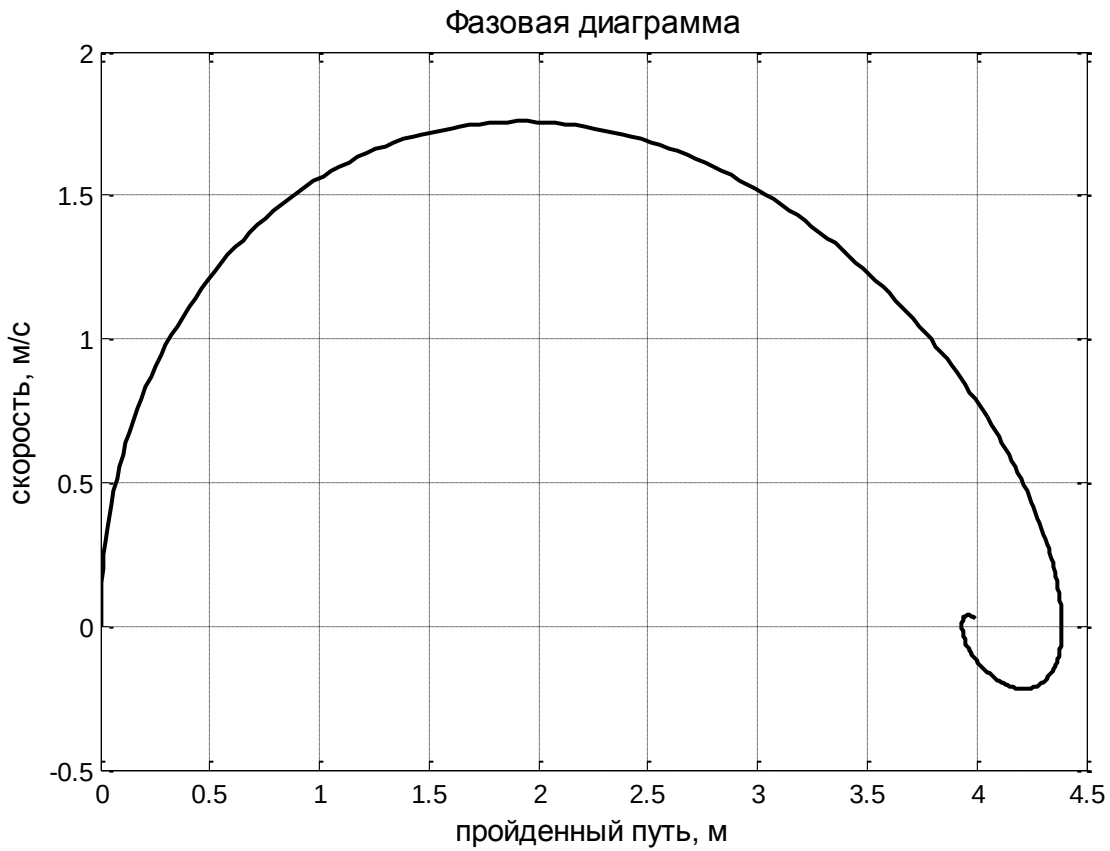
⇨

Возможно моделировать поведение
- разных автомобилей
- разных водителей
- в различной дорожной обстановке

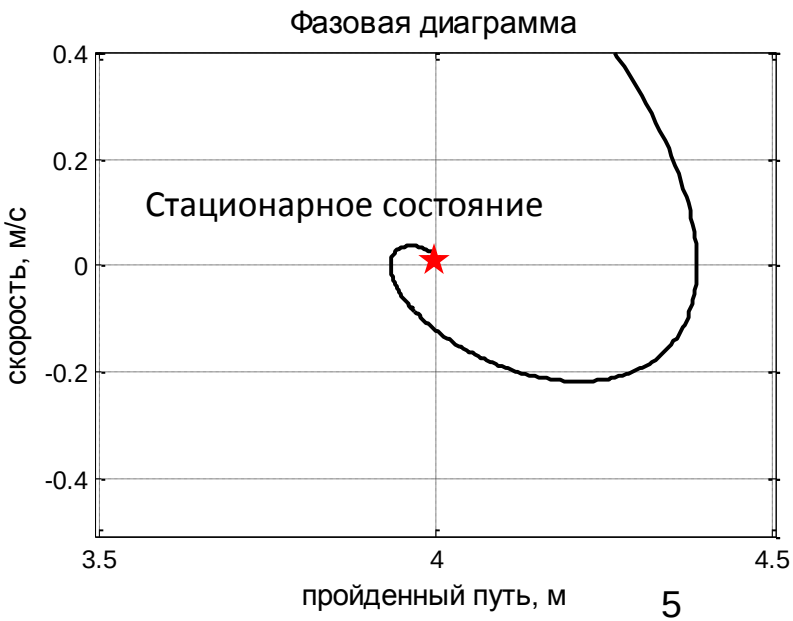
Колебания в окрестности стационарного состояния



Значения параметров модели: $\delta = 2,\ a = 3,\ T = 1,\ d = 5$



Затухающие колебания в окрестности стационарного состояния:

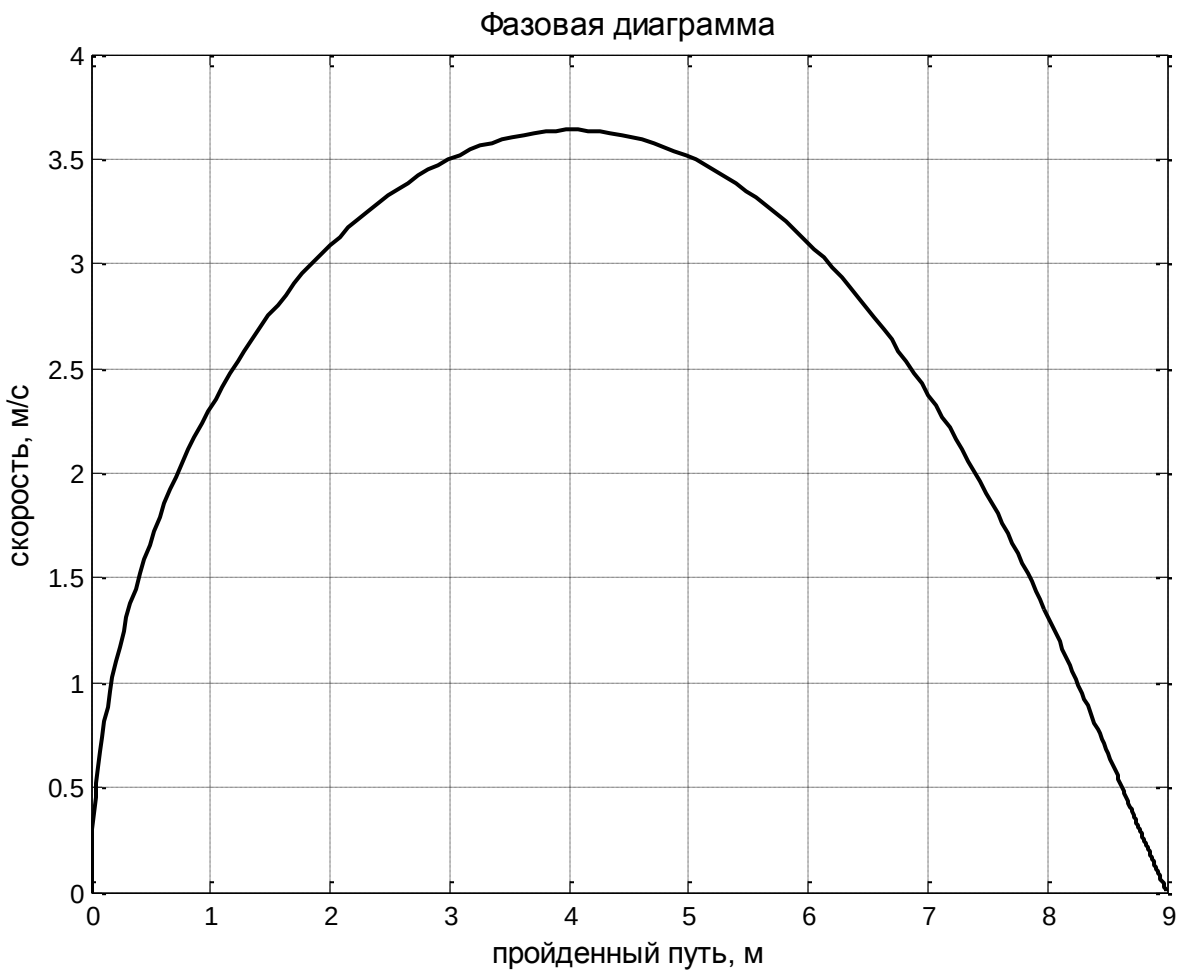


Условия отсутствия колебаний

Условия отсутствия колебаний в окрестности стационарного состояния:

$$\begin{cases} \dfrac{aT^2}{s_n^{'}} \geq 2, \ \ \delta > 1 \\ a\left(\dfrac{1}{2V_0} + \dfrac{T}{s_n^{'}} \right)^2 s_n^{'} \geq 2, \ \ \delta = 1 \end{cases}$$

Значения параметров модели: $\delta = 2, \ a = 3, \ T = 1, \ d = 1$



Подбор параметров ОДУ

Поведение системы описывается системой ОДУ с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, \Theta) \\ c_p(x(t_1), \Theta) = 0 \end{cases}$$

x – вектор переменных состояния (скорость и координата каждого автомобиля)
Θ – вектор настраиваемых параметров (параметры модели IDM)
t_1 – начальный момент времени

$\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{N}$ – набор экспериментальных данных (скорость и координата в некоторые моменты времени)

Дискретизация дифференциального уравнения: $x_{i+1} - x_i = \Delta_t f(x_i, x_{i+1}, \Theta),\ x_i = x(t_i, \Theta),\ i = 1, \ldots, N-1$

$\Downarrow$

Ограничения в виде равенств: $c_i = x_{i+1} - x_i - \Delta_t f(x_i, x_{i+1}, \Theta),\ i = 1, \ldots, N-1$

+ ограничение в виде неравенства из условия устойчивости – $c(\Theta) < 0$

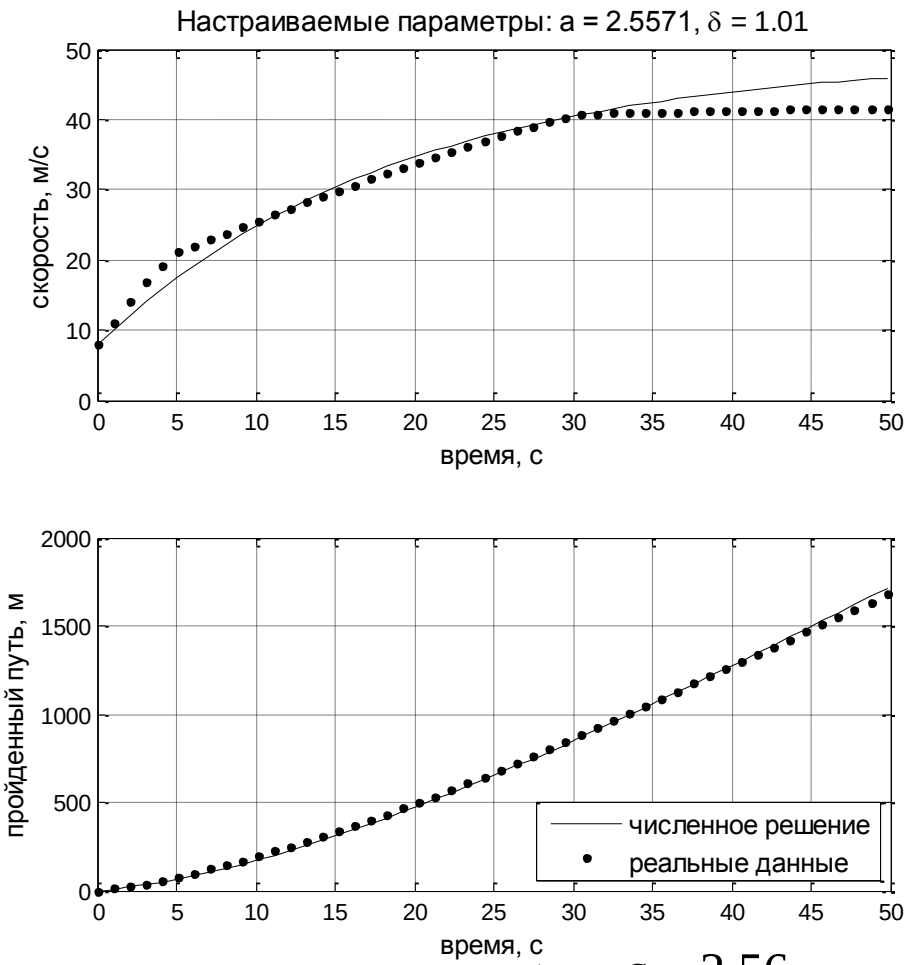
Задача оценки параметров – задача квадратичной условной минимизации с нелинейными ограничениями:

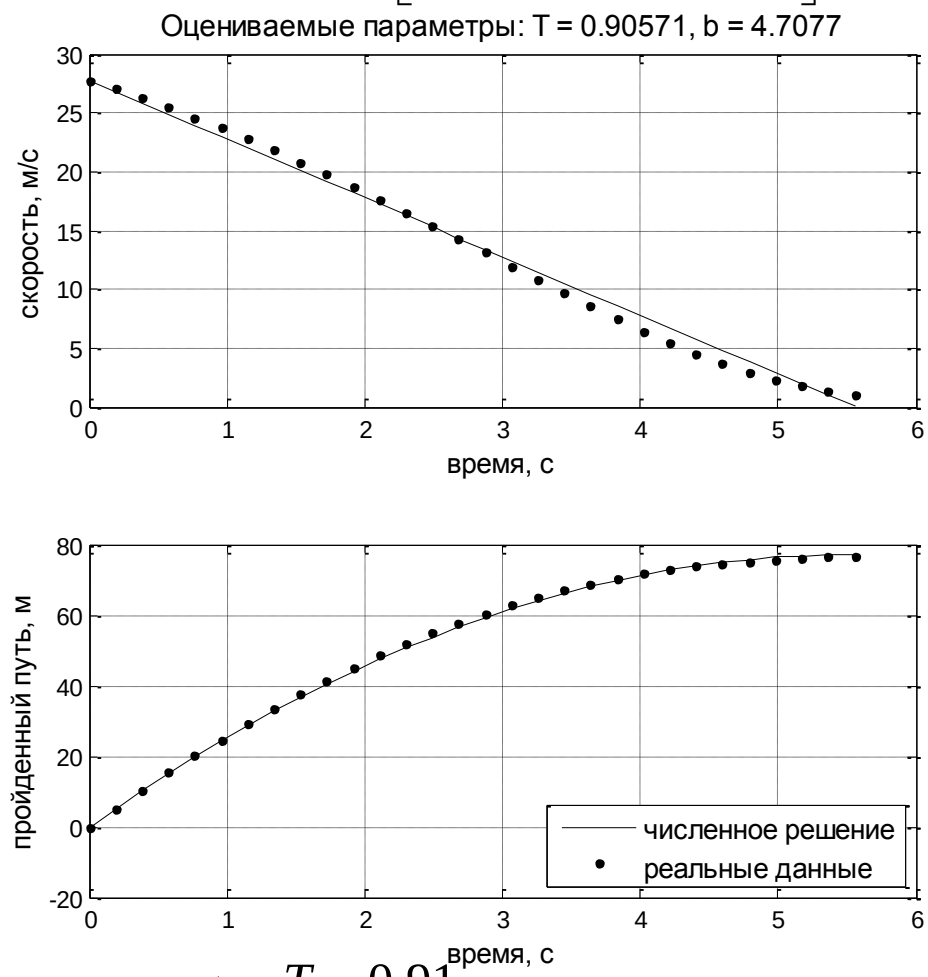
$$\begin{cases} m(x_1, \ldots, x_N, \Theta) = \dfrac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} [\tilde{x}_i - x(t_i, \Theta)]^T [\tilde{x}_i - x(t_i, \Theta)] \to \min \\ c_i(x_i, x_{i+1}, \Theta) = 0, i = 1, \ldots, N-1 \\ c_p(x_1, \Theta) = 0 \\ c(\Theta) < 0 \end{cases}$$

Настройка параметров модели

Ускорение автомобиля на свободной дороге: $\dot{v} = a\left[1 - \left(\frac{v}{v^0}\right)^{\delta}\right]$

$$\dot{v} = a\left[1 - \left(\frac{v}{v^0}\right)^{\delta} - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s}\right)^2\right]$$





$a = 2.56$

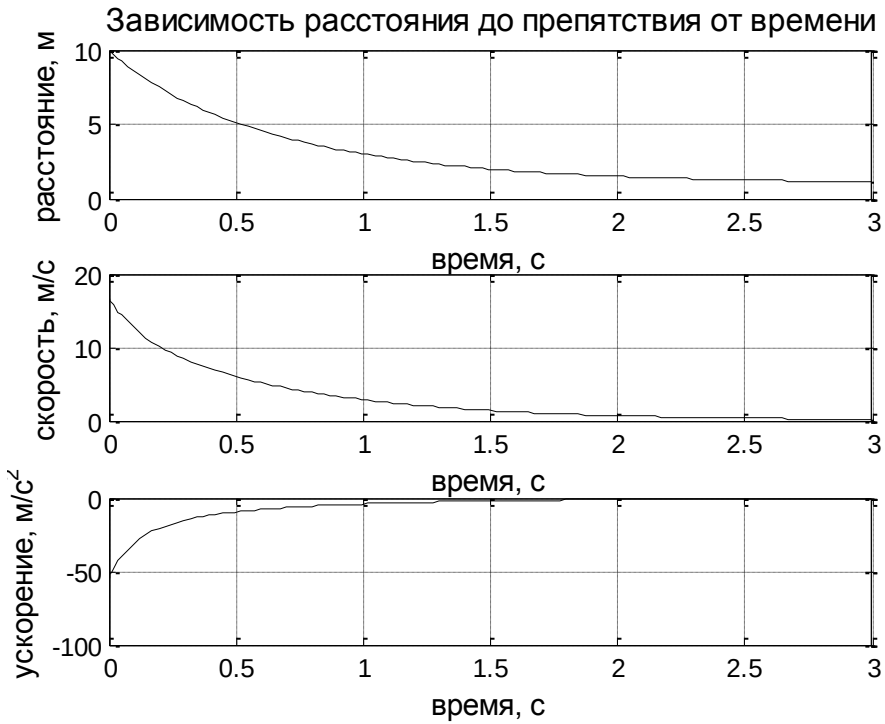
$\delta = 1.01$

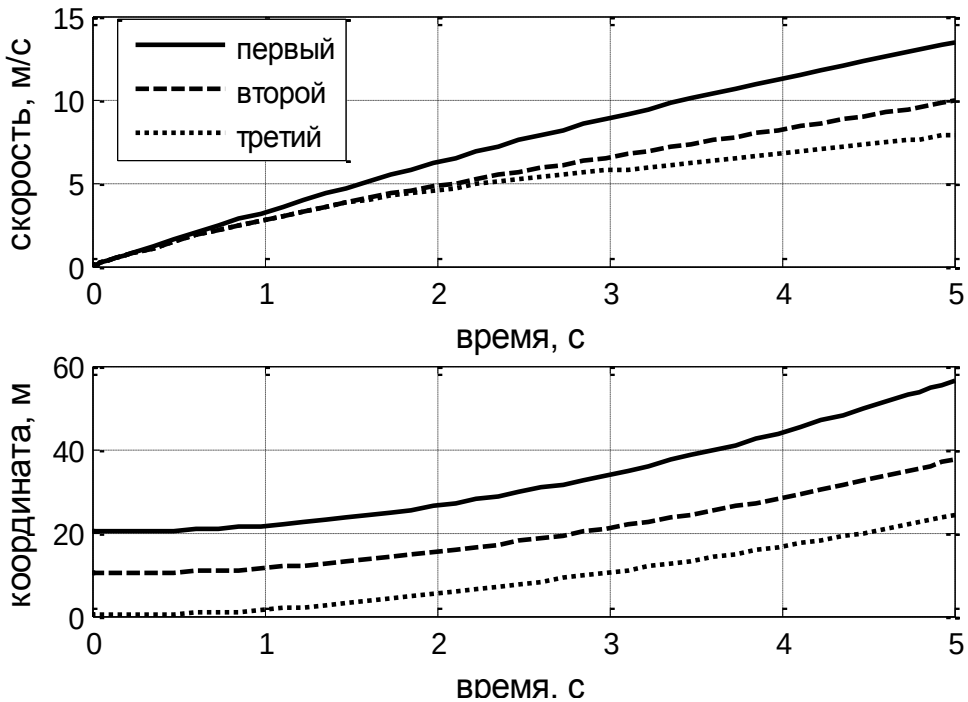
$T = 0.91$

$b = 4.71$

Недостатки модели разумного водителя

- Неправдоподобно большие ускорения при торможении → модель без столкновений
- Мгновенная реакция водителя





- Дистанция в установившемся потоке зависит от параметра δ и желаемой скорости V_0:

$$d^*_{IDM}(v) = (s_0 + Tv) \Big/ \sqrt{1 - \left(v / v^0\right)^{\delta}}$$

Модификация модели разумного водителя – модель с весами

Дистанция в установившемся потоке (модель Танака): $d^*(v) = d + Tv + cv^2$

d – средняя длина автомобиля
T – время, характеризующее реакцию водителя
c – коэффициент пропорциональности тормозному пути

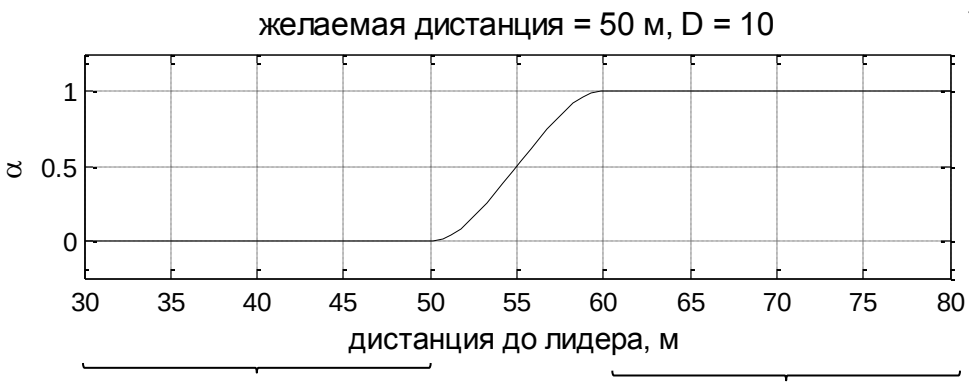
Параметры модели:

$$a = 3.42,\ \delta = 1.01,\ T = 0.78,\ c = 0.05$$

Ускорение по новой модели:

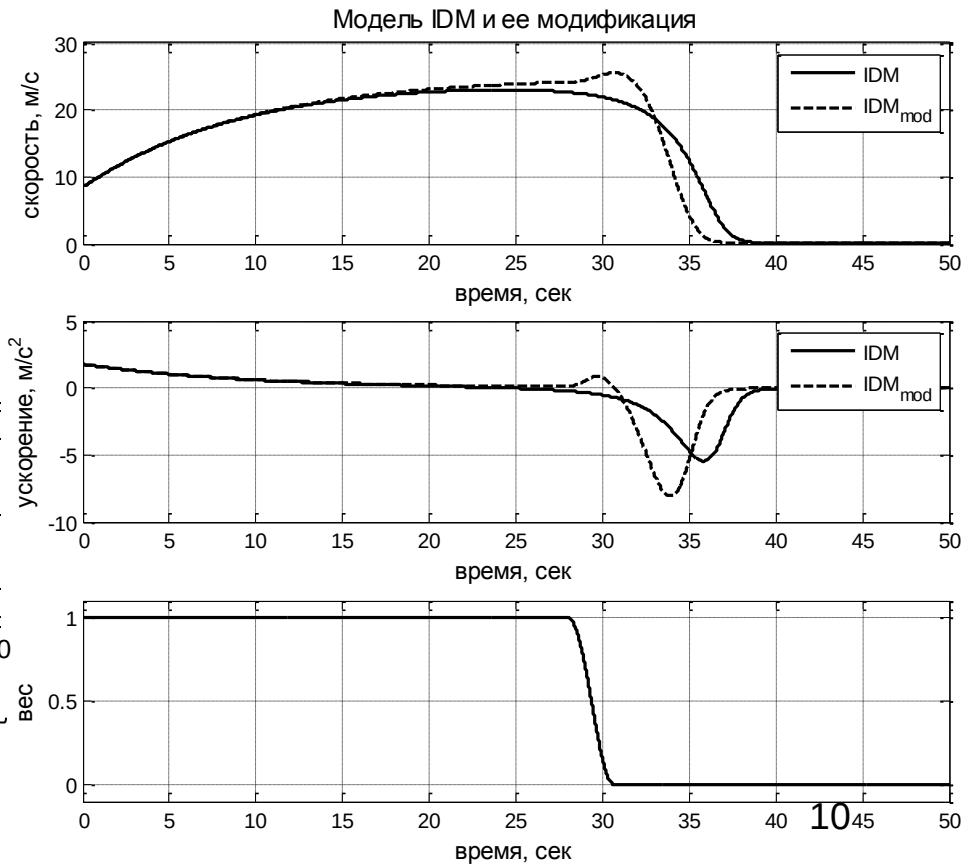
$$\dot{v} = \alpha a\left(1 - \left(\frac{v}{v^0}\right)^{\delta}\right) + (1-\alpha)a\left(1 - \left(\frac{d^*}{h}\right)^2\right)$$

Функция-вес α зависит от фактической дистанции *h*, желаемой дистанции d^* и параметра D:



Дистанция меньше желаемой – только второе слагаемое

«Далеко» от лидера – только первое слагаемое

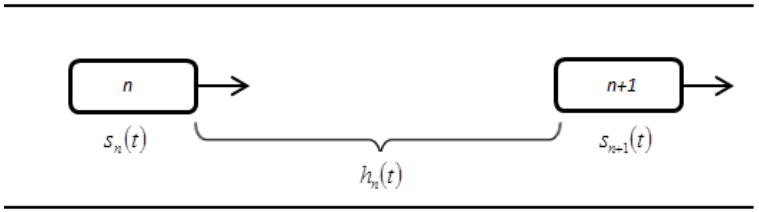


Модель с запаздыванием по времени

Ускорение автомобиля: $$\dot{v}_n(t) = \alpha \cdot a\left(1 - \left(\frac{v_n(t-\tau)}{v^0}\right)^{\delta}\right) + (1-\alpha)\cdot b\left[V\left(h_n(t-\tau)\right) - v_n(t)\right]$$

τ – время реакции,
b – чувствительность,
α – функция-вес (как в модификации модели Трайбера)

+ уравнение для дистанции: $\dot{h}_n(t) = v_{n+1}(t) - v_n(t)$

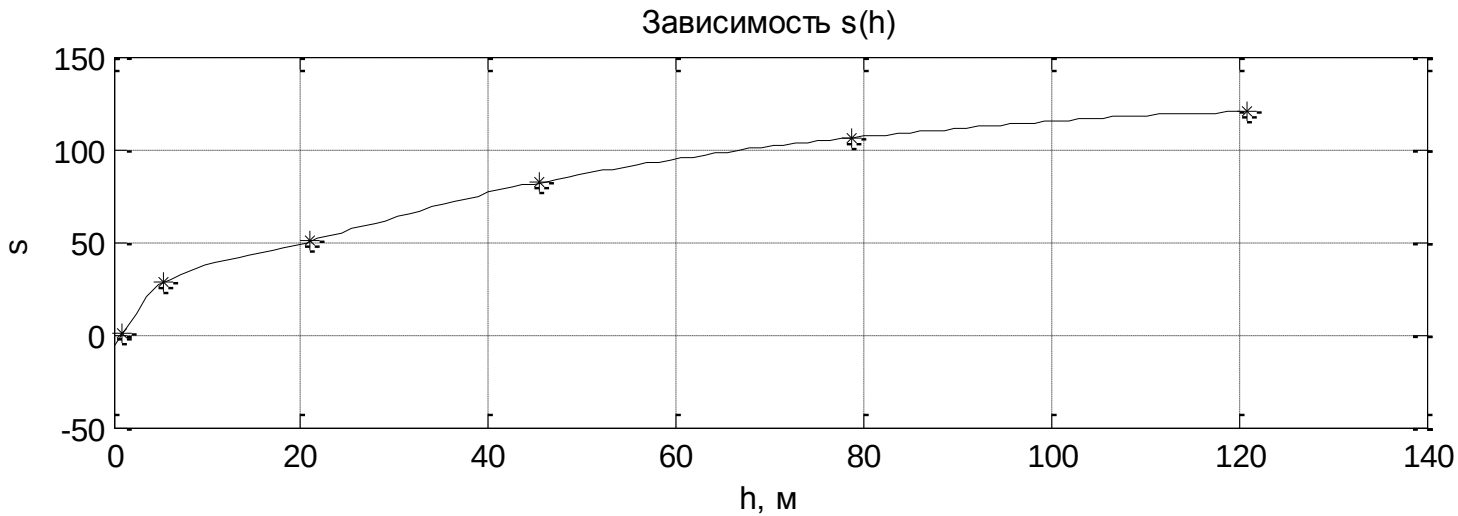


Функция оптимальной скорости:

v^0 – желаемая скорость

h_{stop} – минимальная дистанция

$$V(h) = \begin{cases} 0, 0 \le h \le h_{stop} \\ v^0 \dfrac{\left(\dfrac{h - h_{stop}}{s(h)}\right)^3}{1 + \left(\dfrac{h - h_{stop}}{s(h)}\right)^3}, h > h_{stop} \end{cases}$$



Задача моделирования автомобильного трафика

Модель движения по одной полосе

+ Критерии безопасного проезда перекрестов → моделирование проезда различного типа перекрестков

+ Дорожная карта → моделирование в масштабах города

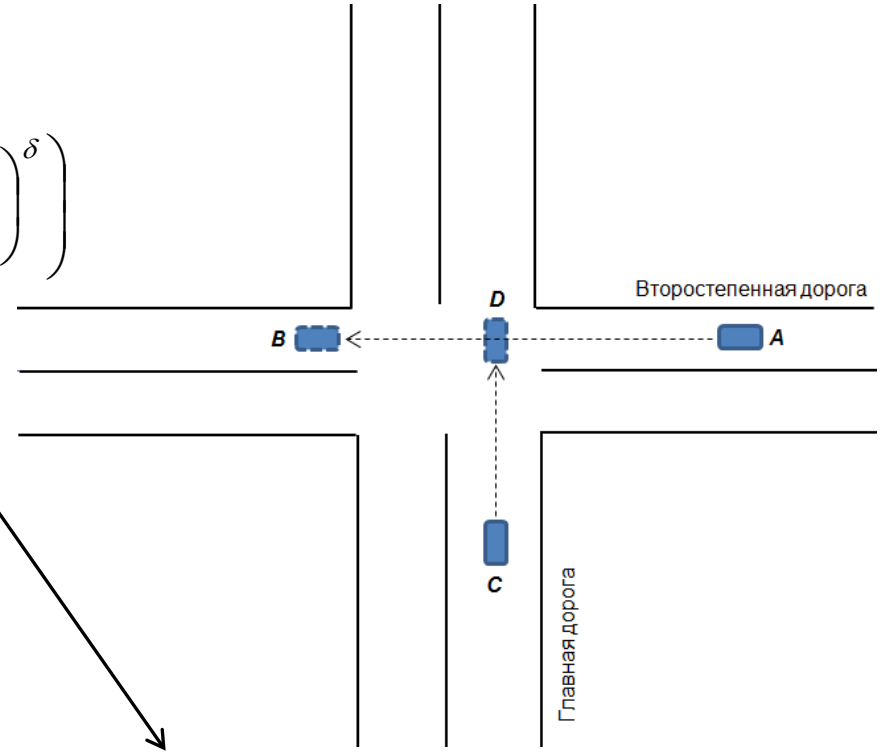
+ Критерии безопасного перестроения → моделирование многополосного движения

Критерий безопасного проезда перекрестка

Временной критерий: $t_{AB} < t_{CD}$

Уравнение движения (δ = 1.01):

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = a\left(1 - \left(\dfrac{v}{v^0}\right)^{\delta}\right) \\ \dot{s}(t) = v(t) \end{cases}$$



- $\delta = 1$ – верхняя оценка для времени (для автомобиля на второстепенной дороге):

$$t^{app}{}_{\delta=1} = 2\sqrt[6]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + |Q|} \cdot \cos\left(arctg\left(-\frac{2\sqrt{|Q|}}{q}\right)\Big/3\right) + \frac{v^0}{a}$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,\ p = -3\left(\frac{v^0}{a}\right)^2\left(1 + 2\frac{v_c}{v^0 - v_c}\right),$$

$$q = 2\left(\frac{v^0}{a}\right)^3\left(\frac{3S}{v^0 - v_c}\frac{a}{v^0} - \frac{3v^0}{v^0 - v_c} - 1\right)$$

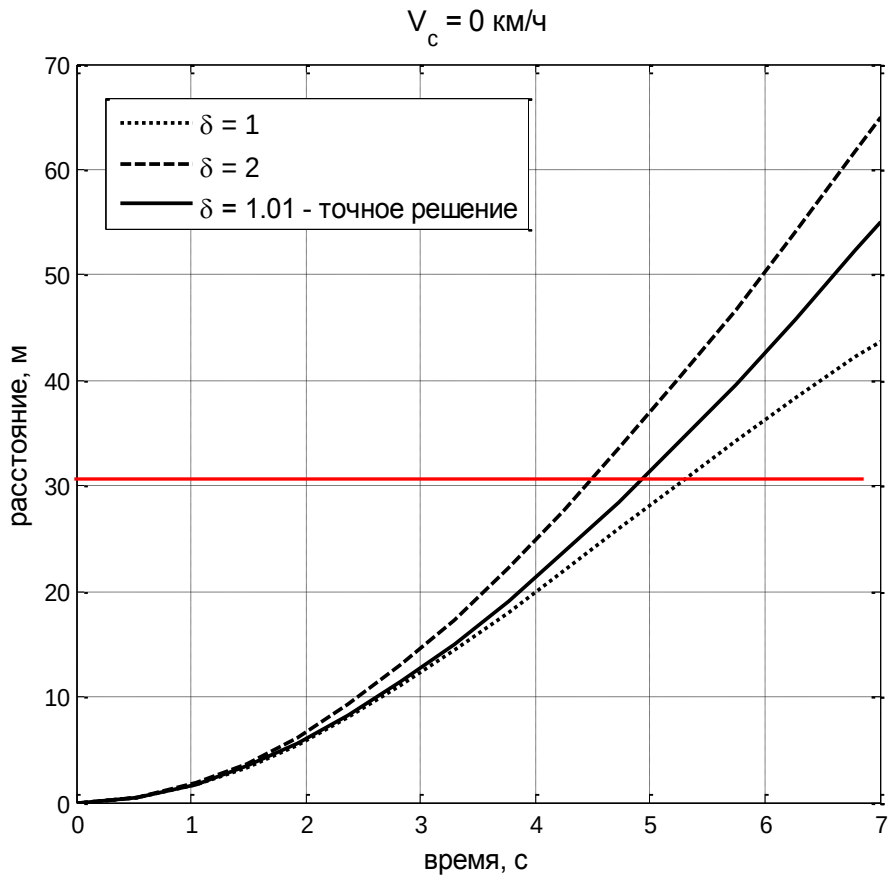
- $\delta = 2$ – нижняя оценка для времени (для автомобиля на главной дороге):

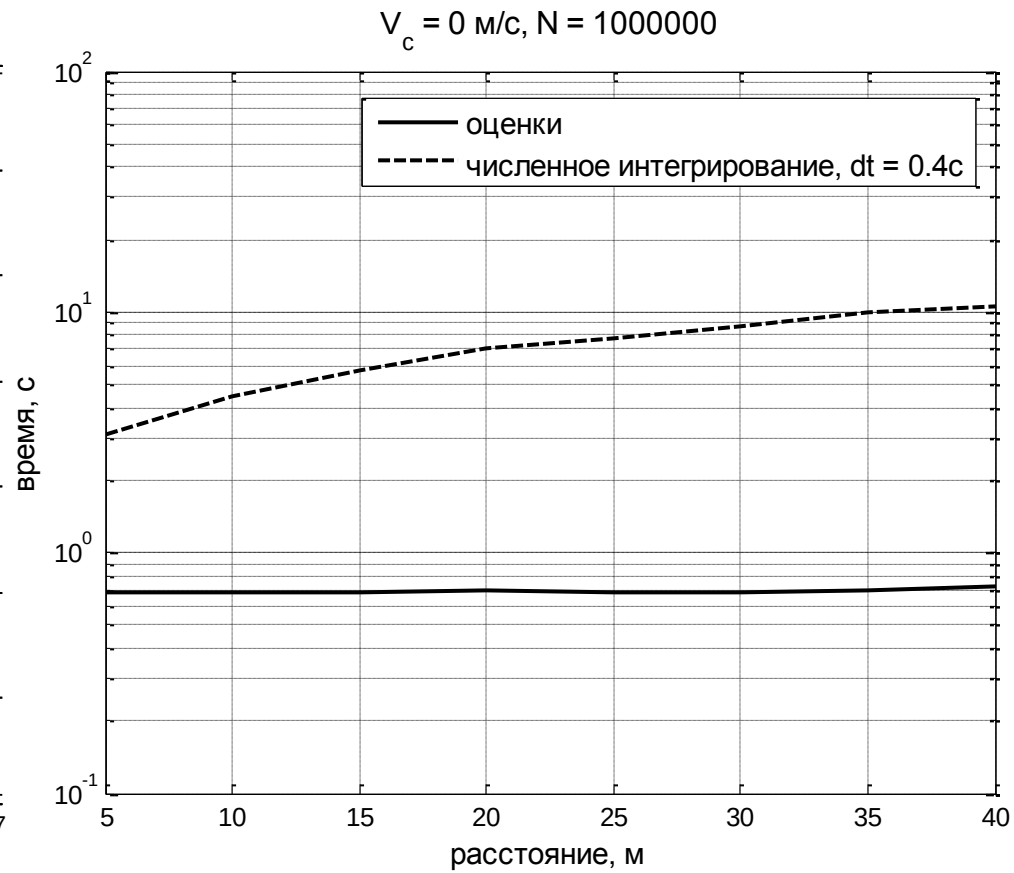
$$t_{\delta=2} = \frac{2}{c_2}\ln\left(\frac{c_3(c_1 - 1) - \sqrt{(c_3(c_1 - 1))^2 + 4c_1}}{2c_1}\right)$$

$$c_1 = \frac{v_c + v^0}{v_c - v^0},\ c_2 = \frac{2a}{v^0},\ c_3 = e^{\frac{c_2 S}{2v^0}}$$

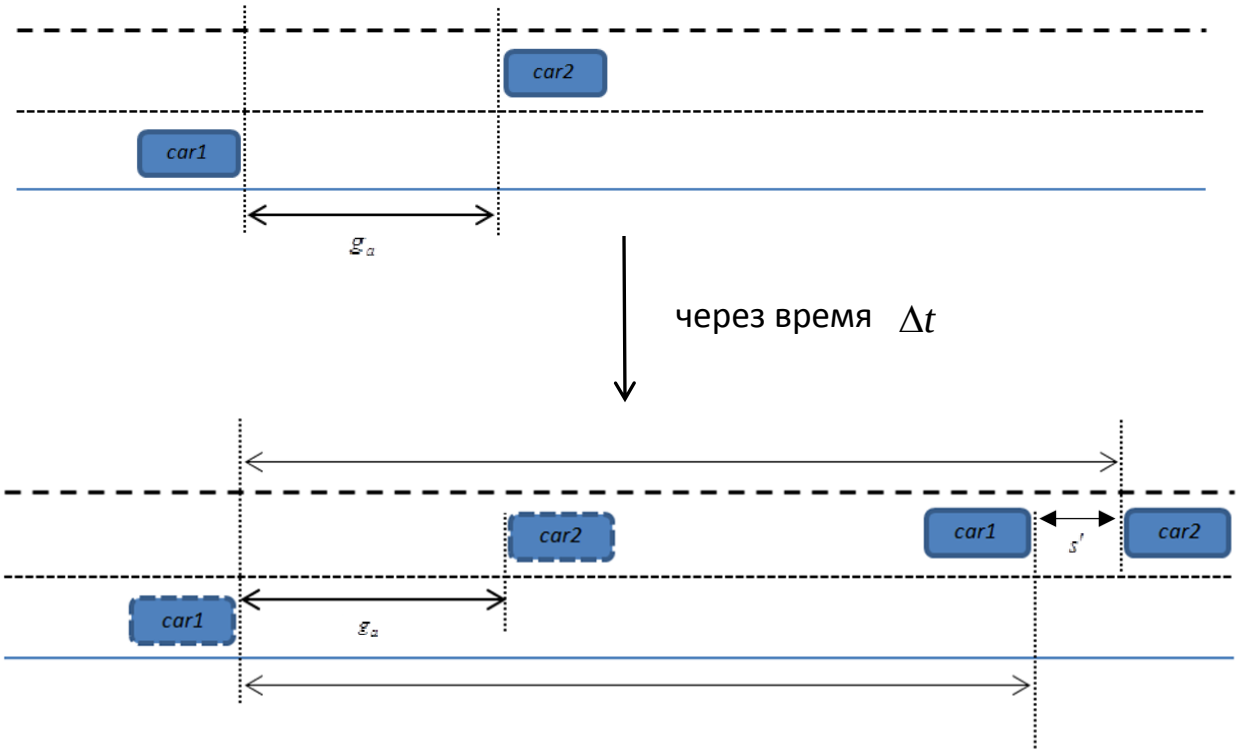
Оценки времени проезда перекрестка (2)

$$t_{\delta=2} < t < t_{\delta=1} < t_{\delta=1}^{app}$$





Критерии безопасного перестроения



Критерий: $$v_1\Delta t + v_1 T + s_0 < g_a + v_2\Delta t \quad => \quad g_a > (v_1 - v_2)\Delta t + v_1 T + s_0$$

Δt – время на выполнение маневра перестроения

τ – время реакции водителя

s_0 – минимальная (заторная) дистанция

Результаты

- Предложена методика настройки параметров модели
- Предложена модификация модели разумного водителя
- Предложена новая модели трафика на основе уравнений с запаздыванием
- Сформулированы критерии безопасного перестроения и безопасного проезда перекрестков
- Разработана структура данных, которая позволяет моделировать автомобильный трафик в городских условиях
- Создано приложение, которое моделирует автомобильный трафик с визуализацией

Дальнейшее развитие

- Исследование устойчивости новой модели с запаздыванием
- Совместное использование макро и микро моделей трафика
- Создание моделей агентов со специальным поведением (тренажеры спецслужб)
- Предложение методики калибровки моделей автомобильного трафика на основе собираемых статистических данных о трафике

Приложение 1. Оценки времени проезда перекрестка

Ускорение автомобиля описывается уравнением (δ = 1.01): $\dot{v}(t) = a\left(1 - \left(\frac{v}{v^0}\right)^{\delta}\right)$ (1)

- Нижняя оценка для времени, $\delta = 2$

Проинтегрируем (1) дважды: $s(t) = \frac{2v^0}{c_2}\ln\left(\frac{c_1 e^{c_2 1} - 1}{c_1 - 1}\right) - v^0 t$

$c_1 = \frac{v_c + v^0}{v_c - v^0}$, $c_2 = \frac{2a}{v^0}$, v_c – скорость в данный момент времени

Положим $s(t) = s$ и выразим время t: $t_{\delta=2} = \frac{2}{c_2}\ln\left(\frac{c_3(c_1 - 1) - \sqrt{(c_3(c_1 - 1))^2 + 4c_1}}{2c_1}\right)$, где $c_3 = e^{\frac{c_2 S}{2v^0}}$

- Верхняя оценка для времени, $\delta = 1$

Проинтегрируем (1) дважды: $s(t) = \frac{v^0}{a}\cdot(v^0 - v_c)\left(e^{-at/v^0} - 1\right) + v^0 t$

Приблизим полиномом третьей степени и применим формулу Кардано:

$$t^{app}{}_{\delta=1} = 2\sqrt[6]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + |Q|}\cdot\cos\left(\frac{arctg\left(-\frac{2\sqrt{|Q|}}{q}\right)}{3}\right) + \frac{v^0}{a}$$

, где

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \qquad p = -3\left(\frac{v^0}{a}\right)^2\left(1 + 2\frac{v_c}{v^0 - v_c}\right)$$

$$q = 2\left(\frac{v^0}{a}\right)^3\left(\frac{3S}{v^0 - v_c}\frac{a}{v^0} - \frac{3v^0}{v^0 - v_c} - 1\right)$$

Приложение 1. Оценки времени проезда перекрестка

Уравнение движения (δ = 1.01):

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = a\left(1 - \left(\dfrac{v}{v^0}\right)^{\delta}\right) \\ \dot{s}(t) = v(t) \end{cases}$$

- $\delta = 2$ – нижняя оценка для времени:

$$t_{\delta=2} = \frac{2}{c_2}\ln\left(\frac{c_3(c_1-1) - \sqrt{(c_3(c_1-1))^2 + 4c_1}}{2c_1}\right)$$

$$c_1 = \frac{v_c + v^0}{v_c - v^0},\ c_2 = \frac{2a}{v^0},\ c_3 = e^{\frac{c_2 S}{2v^0}}$$

- $\delta = 1$ – верхняя оценка для времени:

$$t^{app}{}_{\delta=1} = 2\sqrt[6]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + |Q|} \cdot \cos\left(arctg\left(-\frac{2\sqrt{|Q|}}{q}\right)\Big/3\right) + \frac{v^0}{a}$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,\ p = -3\left(\frac{v^0}{a}\right)^2\left(1 + 2\frac{v_c}{v^0 - v_c}\right),\ q = 2\left(\frac{v^0}{a}\right)^3\left(\frac{3S}{v^0 - v_c}\frac{a}{v^0} - \frac{3v^0}{v^0 - v_c} - 1\right)$$

v_c – скорость в данный момент времени

S – расстояние до перекрестка