Исследование задачи склейки ориентируемых поверхностей из многоугольников

Выполнил: студент гр. 6057/11 Родионова О.П.

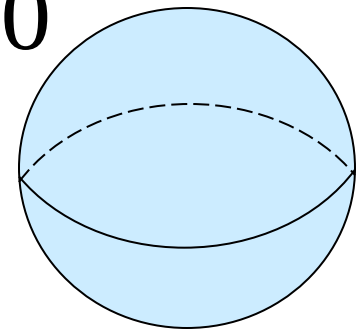
Научный руководитель: Пастор А.В.

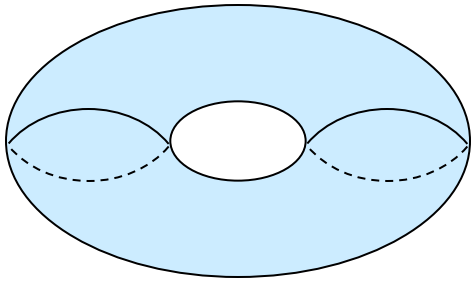
Поверхности рода g

Свойства

- Двумерное многообразие
- Замкнутая (без края)
- Связная
- Ориентируемая
- Триангулируемая
- Род поверхности

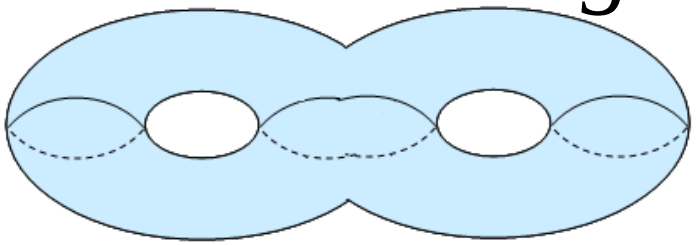
$g = 0$





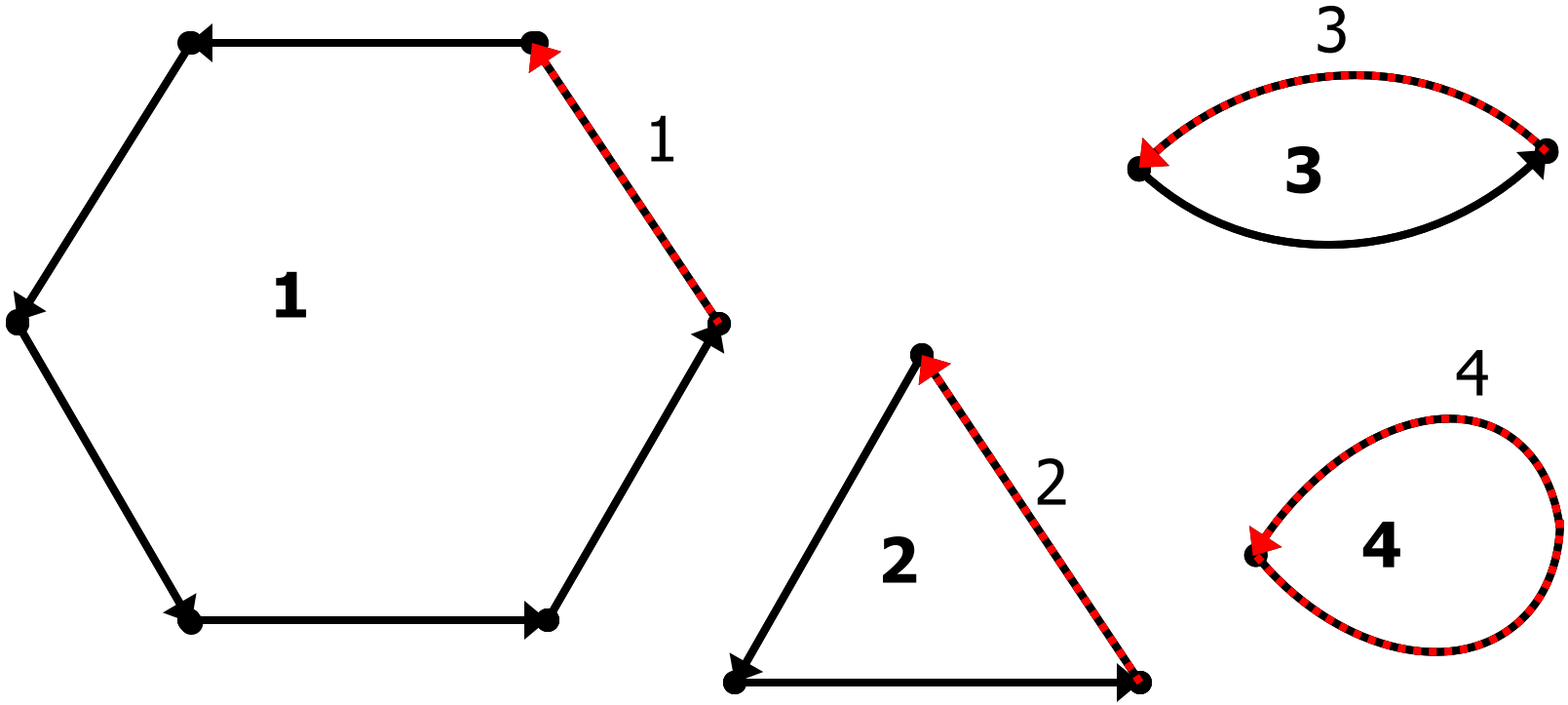
$g = 1$

$g = 2$

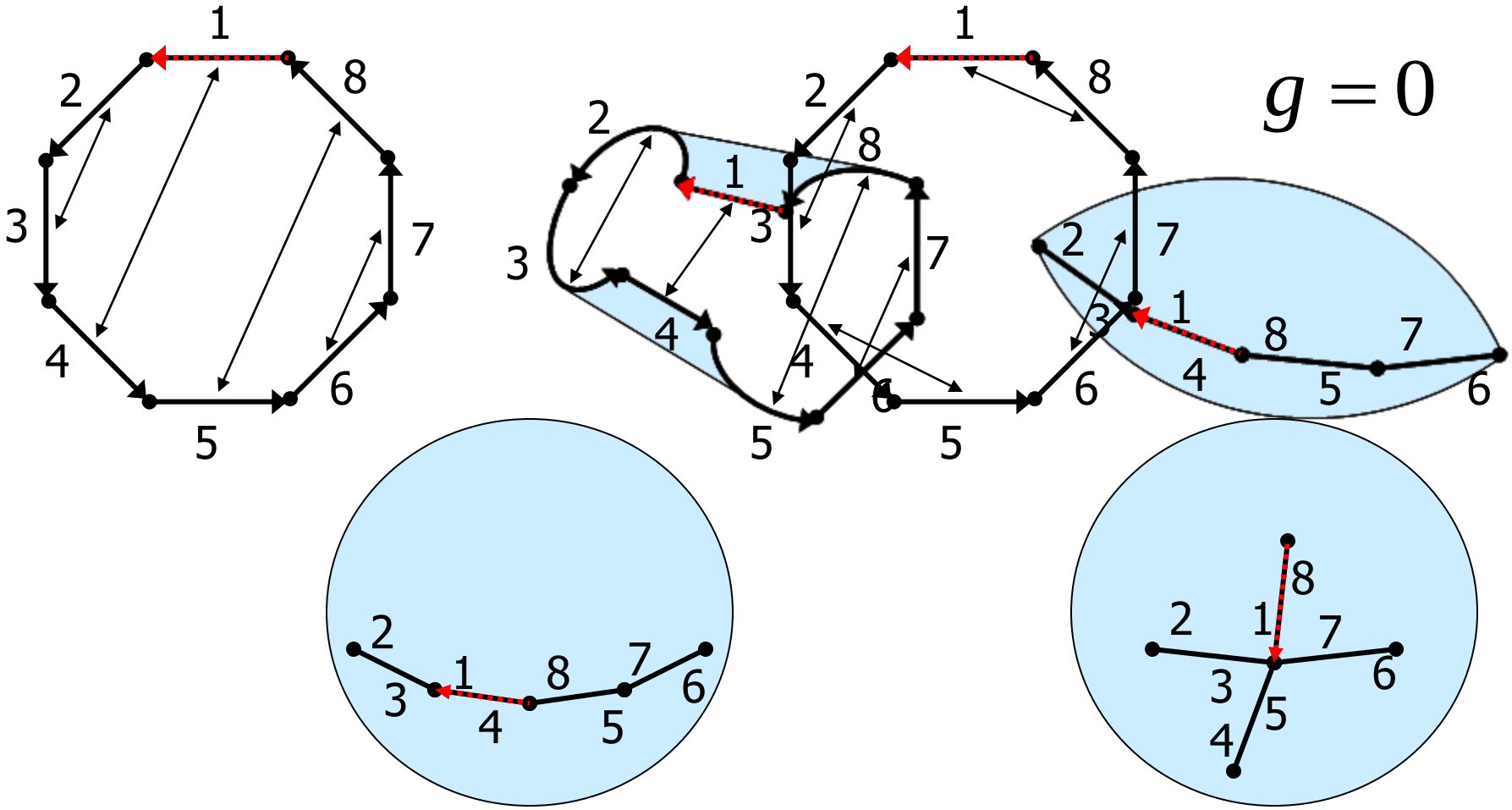


Многоугольники

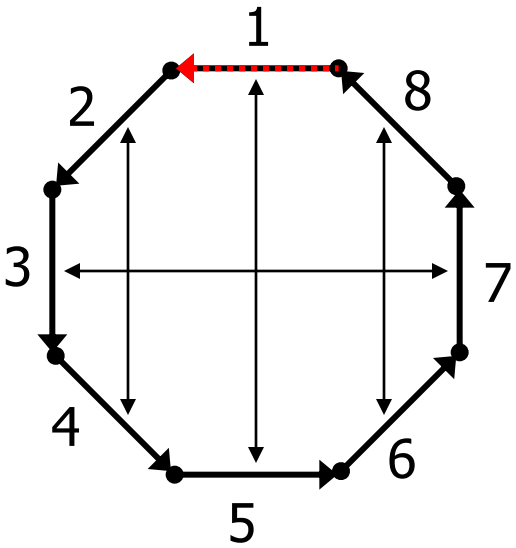
K многоугольников, 2*N* ребер

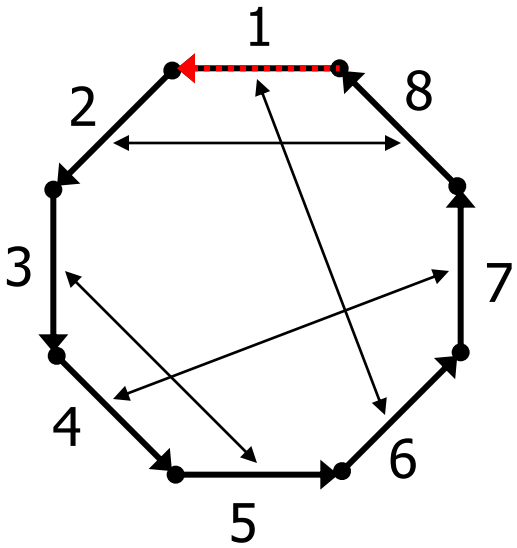


Склейка сферы



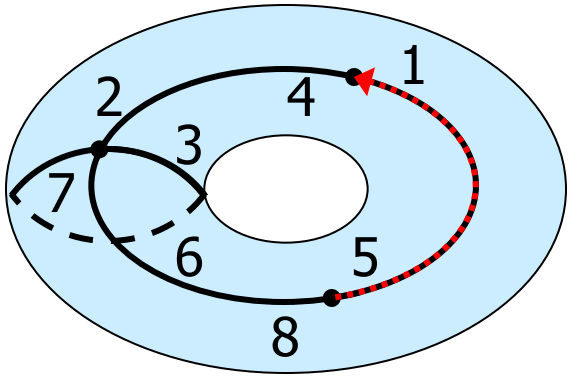
Склейка поверхностей

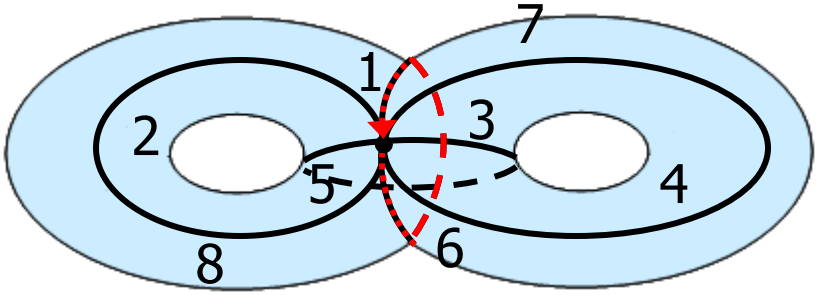




$g = 2$

$g = 1$

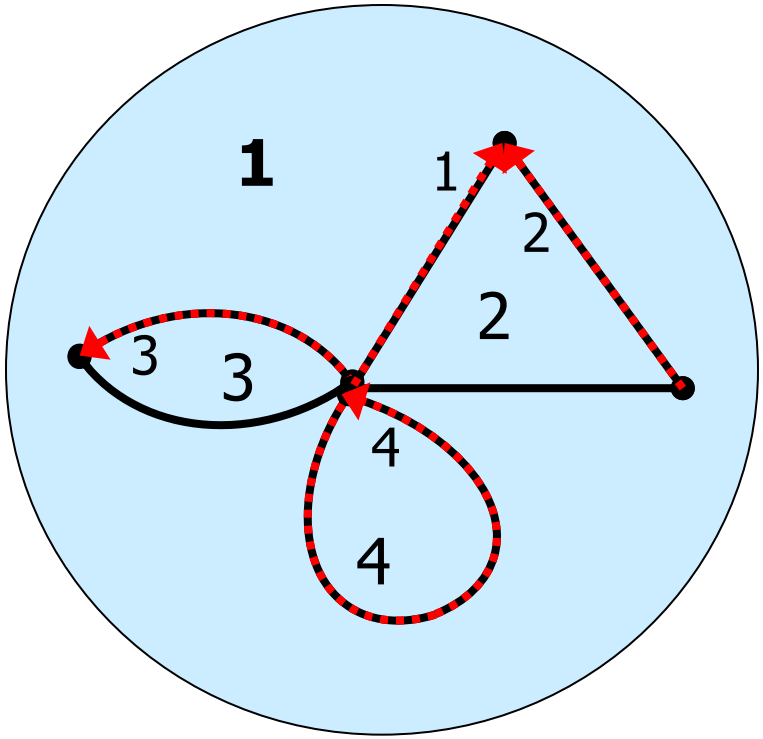




Карты с *K* странами

K многоугольников

2*N* ребер



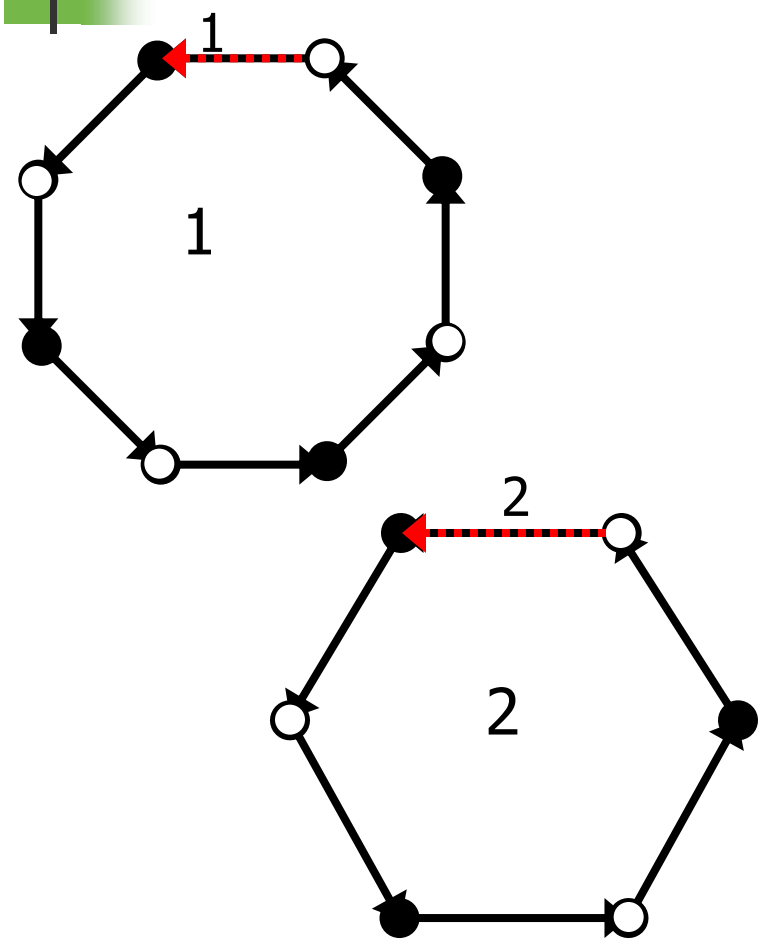
Карта

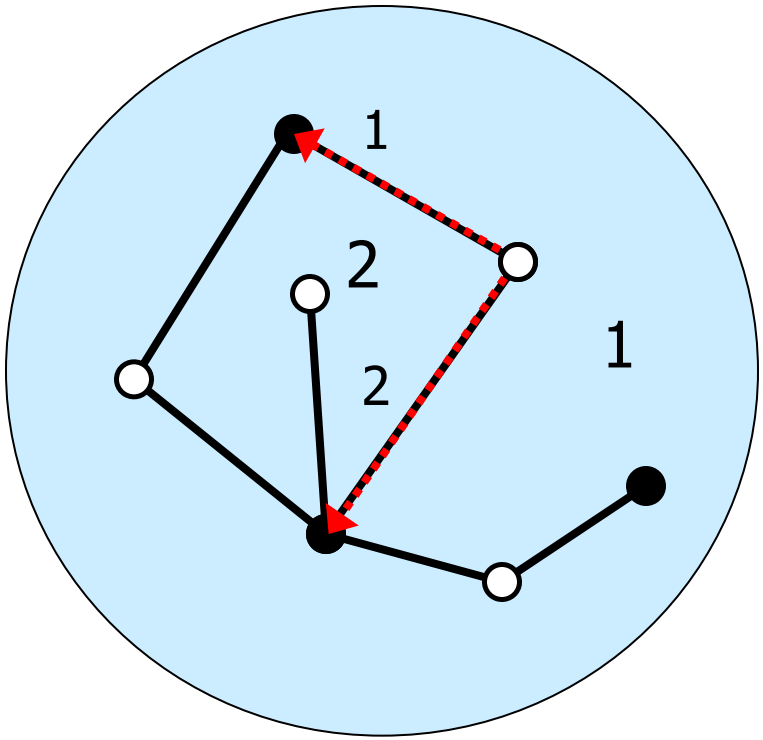
- Поверхность рода *g*
- *K* стран
- *N* ребер
- *V* вершин

Формула Эйлера

$$V - N + K = 2 - 2g$$

Двукрашенные карты





Постановка задачи

Число способов склеить:

$$\varepsilon_g(N,K)$$

- Поверхность рода g
- K многоугольников
- $2N$ ребер

$$B_g(N,K)$$

- Поверхность рода g
- K двукрашенных многоугольников
- $2N$ ребер

Числа Харера-Цагира

$$K=1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_g(N,1)=\varepsilon_g(N)$$

$$\varepsilon_g(N)=\frac{2N-1}{N+1}\left(2\varepsilon_g(N-1)+(N-1)(2N-3)\varepsilon_{g-1}(N-2)\right)$$

$$\varepsilon_0(0)=1 \qquad \varepsilon_g(N)>0 \quad \Leftrightarrow \quad N\geq 2g$$

$$B_g(N)=\frac{1}{N+1}\left(2(2N-1)B_g(N-1)+(N-2)(N-1)^2B_{g-1}(N-2)\right)$$

$$B_0(0)=1$$

Явные формулы для чисел Харера-Цагира

g	$\varepsilon_g(N)$	$B_g(N)$
$g=0$	$\dfrac{(2N)!}{N!(N+1)!}$	$\dfrac{(2N)!}{N!(N+1)!}$
$g=1$	$\dfrac{(2N)!}{12N!(N-2)!}$	$\dfrac{(2N-2)!}{12(N-1)!(N-3)!}$
$g=2$	$\dfrac{(5N-2)(2N)!}{1440N!(N-4)!}$	$\dfrac{(5N^2-7N+6)(2N-4)!}{1140(N-2)!(N-5)!}$

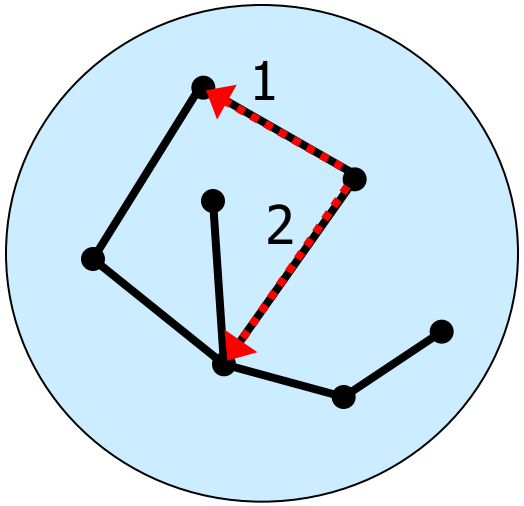
Склейка сферы из 2-х многоугольников

$$N \geq 2$$

$$\varepsilon_0(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-2} \varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-1-i,2) + N(2N-1)\varepsilon_0(N-1)$$

$$\varepsilon_0(1,2) = 1 \qquad \varepsilon_0(0,2) = 0$$

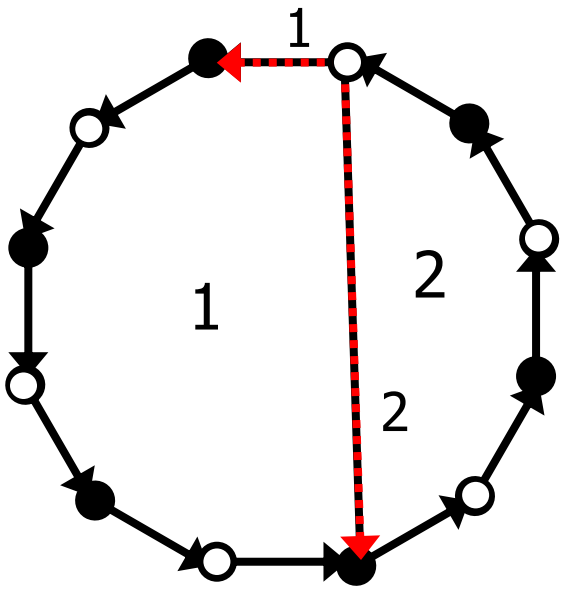
$$\boxed{\varepsilon_0(N,2) = N \cdot 4^{N-1}}$$

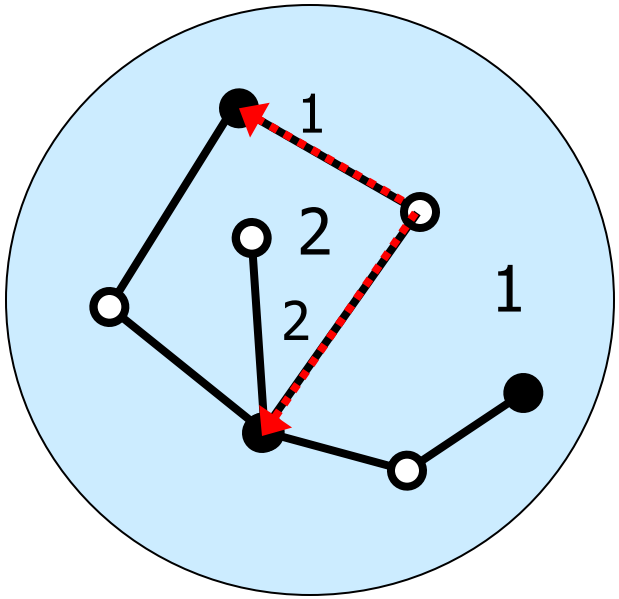


Склейка сферы из 2-х двукрашенных многоугольников

$$B_0(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-3} B_0(i)B_0(N-1-i,2) + \frac{N(N-1)}{2} B_0(N-1)$$

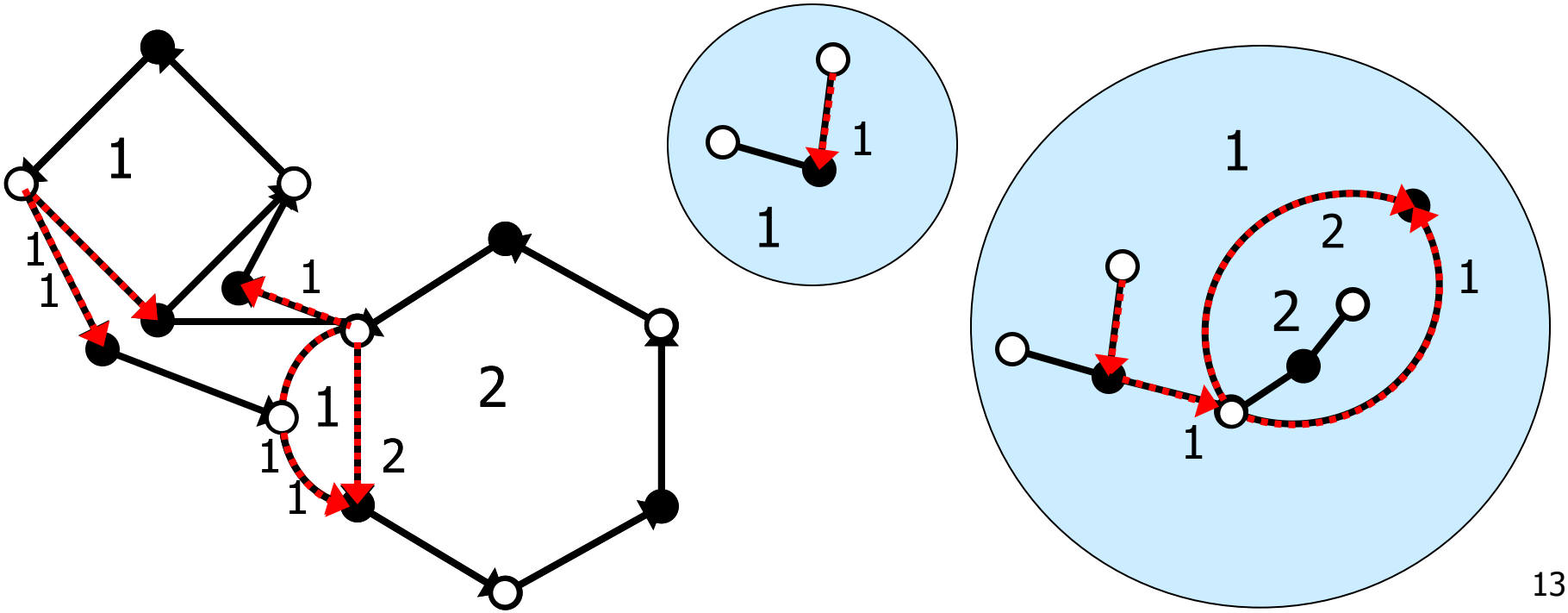
$$B_0(0,2) = B_0(1,2) = 0$$





Склейка сферы из 2-х двукрашенных многоугольников

$$B_0(N,2)=2\sum_{i=0}^{N-3}B_0(i)B_0(N-1-i,2)+\frac{N(N-1)}{2}B_0(N-1)$$



Склейка сферы из 2-х двукрашенных многоугольников

$$B_0(N,2) = 2\sum_{i=0}^{N-3} B_0(i) B_0(N-1-i,2) + \frac{N(N-1)}{2} B_0(N-1)$$

$$\boxed{B_0(N,2) = \varepsilon_0(N-1,2) = (N-1)\cdot 4^{N-2}}$$

Склейка сферы из 3-х многоугольников

$$\tilde{\varepsilon}_0(N, M, K)$$

- Склейка сферы (g=0)
- K многоугольников
- N ребер
- 1-ый многоугольник: M ребер

$$\tilde{\varepsilon}_0(N, M, K) > 0$$

$$\begin{cases} N, M, K \geq 1 \\ N - \text{четное} \\ N \geq M + K - 1 \\ K = 1 \Rightarrow N = M \end{cases}$$

$$\tilde{\varepsilon}_0(N, N, 1) = \varepsilon_0(N/2)$$

Склейка сферы из 3-х многоугольников (2)

$$\tilde{\varepsilon}_0(N,M,2)=2\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor}\varepsilon_0(i-1)\tilde{\varepsilon}_0(N-2i,M-2i,2)+(N-M)\varepsilon_0\left(\frac{N}{2}-1\right)$$

$$\varepsilon_0(N,3)=2\sum_{i=0}^{N-2}\left(\varepsilon_0(i)\varepsilon_0(N-1-i,3)+\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_0(N-1-i,2)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2N-3}(i+1)(i+2)\tilde{\varepsilon}_0(2N-2,i,2)$$

$$\varepsilon_0(0,3)=\varepsilon_0(1,3)=0$$

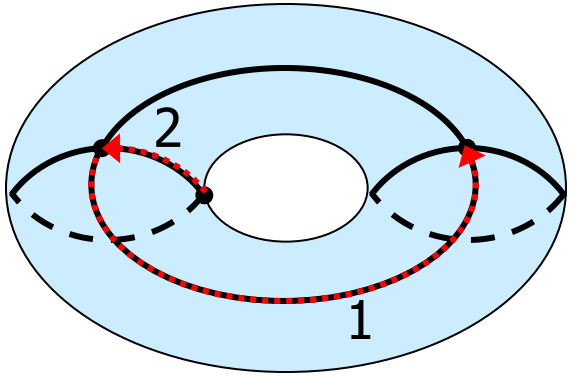
$$\boxed{\varepsilon_0(N,3)=\frac{(8N+5)(N-1)N(N+1)}{210}C_{2N+1}^{N}}$$

Склейка тора из 2-х многоугольников

$$\varepsilon_1(N,2)=2\sum_{i=0}^{N-3}\left(\varepsilon_0(i)\varepsilon_1(N-1-i,2)+\varepsilon_0(i,2)\varepsilon_1(N-1-i)\right)+$$

$$+N(2N-1)\varepsilon_1(N-1)+\varepsilon_0(N-1,3)$$

$$\varepsilon_1(0,2)=\varepsilon_1(1,2)=\varepsilon_1(2,2)=0$$



$$\boxed{\varepsilon_1(N,2)=4^{N-4}\,\frac{N(N-1)(N-2)(13N+3)}{3}}$$

Выводы

- Исследован метод получения рекуррентных формул для склейки поверхностей из многоугольников
- Получены явные формулы для числа способов склеить
  - Сферу из 2-х двукрашенных многоугольников
  - Сферу из 3-х многоугольников
  - Тор из 2-х многоугольников

Спасибо за внимание!